Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

2. Juni 2016

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2016

Übungsblatt 5

Zu bearbeiten 9. Juni 2016

Aufgabe 1: **($8+8+8+8=32$ Punkte)**

Entscheiden Sie für jede der folgenden Klassen, ob sie

- endlich axiomatisierbar,
- erststufig axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar, oder
- nicht erststufig axiomatisierbar

ist und beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(a) Die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) gerichteten Graphen.

(b) Die Klasse aller nicht azyklischen (endlichen oder unendlichen) gerichteten Graphen.

(c) Die Klasse aller endlichen azyklischen gerichteten Graphen.

(d) Die Klasse aller endlichen nicht azyklischen gerichteten Graphen.

Zur Erinnerung: Ein (endlicher oder unendlicher) gerichteter Graph ist *azyklisch*, falls er keinen gerichteten Kreis endlicher Länge enthält.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Sei $\mathcal{A} := (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathbb{N}})$ und sei $\mathcal{B}$ die $\{\leqslant\}$-Struktur mit Universum

$$B \quad := \quad \big(\,\{0\} \times \mathbb{N}\,\big) \,\cup\, \big(\,\{1\} \times \mathbb{Z}\,\big)$$

und Relation

$$\leqslant^{\mathcal{B}} \quad := \quad \Big\{\, \big((i,j),(i',j')\big) \in B \times B \;:\; i < i' \text{ oder } \big(i = i' \text{ und } j \leqslant j'\big) \,\Big\}.$$

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ elementar äquivalent? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Hinweis: Sie können Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele verwenden.

... auf der Rückseite geht's weiter!

Aufgabe 3: **($5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$ Punkte)**

Sei A ein endliches Alphabet. Für eine Menge $L \subseteq A^*$ sei $\bar{L} := A^* \setminus L$.

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Eine Menge $L \subseteq A^*$ ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.

(b) Jede entscheidbare Menge $L \subseteq A^*$ ist rekursiv aufzählbar.

(c) Eine Menge $L \subseteq A^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl L als auch $\bar{L}$ semi-entscheidbar sind.

(d) Wenn eine Menge $L \subseteq A^*$ semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar ist, dann ist $\bar{L}$ nicht semi-entscheidbar.

(e) Sind $L_1 \subseteq A^*$ und $L_2 \subseteq A^*$ rekursiv aufzählbare Mengen, so ist auch die Menge $L_1 \cap L_2$ rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 4: **(18 Punkte)**

Sei $\mathcal{B}$ ein Nichtstandard-Modell der Arithmetik.
Zeigen Sie: Zwischen je zwei Kopien von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ in $\mathcal{B}$ liegt eine weitere Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$.