

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2016

Übungsblatt 4

Zu bearbeiten 9. Juni 2016

Aufgabe 1: (12,5 + 12,5 = 25 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass das Auswahlaxiom aus dem Wohlordnungssatz folgt.
- (b) Zeigen Sie, dass das Auswahlaxiom aus dem Zornschen Lemma folgt.

Aufgabe 2: (18 + 7 = 25 Punkte)

Seien A und B zwei Mengen. Wir schreiben $A \sim B$ um auszudrücken, dass A und B gleichmächtig sind. Wir schreiben $A \preceq B$ um auszudrücken, dass A höchstens so mächtig wie B ist. Wir schreiben $A \prec B$ um auszudrücken, dass A schwächer als B ist.

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

- (a) Für alle Mengen A und B mit $A \preceq B$ und $B \preceq A$ ist $A \sim B$.
- (b) Für jede Menge A gibt es eine Menge B mit $A \prec B$.

Aufgabe 3: (18 + 7 = 25 Punkte)

- (a) Beweisen Sie den absteigenden Satz von Löwenheim und Skolem (Satz 2.15).
- (b) Gilt auch die verschärfte Variante des absteigenden Satzes von Löwenheim und Skolem, die besagt, dass die Mächtigkeit des Modells höchstens so groß wie die Mächtigkeit von Φ ist?

Aufgabe 4: (18 + 7 = 25 Punkte)

Beweisen Sie Bemerkung 2.17, das heißt zeigen Sie Folgendes: Sei σ eine beliebige Signatur und sei \mathcal{A} eine beliebige σ -Struktur. Dann gilt:

- (a) Ist \mathcal{A} endlich, so gilt für alle σ -Strukturen \mathcal{B} : $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.
- (b) Ist \mathcal{A} unendlich, so gibt es eine σ -Struktur \mathcal{B} mit $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ und $\mathcal{B} \not\cong \mathcal{A}$.

Hinweis: Für (a) können Sie folgendermaßen vorgehen: Zeigen Sie zunächst, dass (a) für *endliche* Signaturen gilt. Folgern Sie daraus, dass für *beliebige* Signaturen gilt: Falls $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, so ist $|B| = |A|$. Folgern Sie daraus, dass (a) für abzählbare Signaturen gilt. Folgern Sie dann, dass (a) auch für beliebige Signaturen gilt.