Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

19. Mai 2016

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2016

Übungsblatt 3

Zu bearbeiten 2. Juni 2016

Aufgabe 1: **(8 + 17 = 25 Punkte)**

Betrachten Sie den Beweis des Satzes von Henkin.

(a) Arbeiten Sie den in den „Skript-Fragmenten“ angegebenen Fall $\varphi = \exists x\, \varphi_1$ im Beweis des Satzes von Henkin so durch, dass Sie ihn bei Bedarf gut an der Tafel erklären können.

(b) Arbeiten Sie die Details für den Fall $\varphi = (\varphi_1 \land \varphi_2)$ im Beweis des Satzes von Henkin aus.

Aufgabe 2: **(13 + 12 = 25 Punkte)**

Zeigen Sie Folgendes (wobei σ eine geeignete Signatur sei, die mindestens ein Relationssymbol enthält):

(a) Es gibt eine widerspruchsfreie, negationstreue Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $[\mathcal{I}_\Phi] \not\models \Phi$.

(b) Es gibt eine widerspruchsfreie Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$, die Beispiele enthält, so dass $[\mathcal{I}_\Phi] \not\models \Phi$.

Zur Information: Mit dieser Aufgabe zeigen Sie, dass im Satz von Henkin die beiden Forderungen, dass Φ negationstreu ist und Beispiele enthält, unverzichtbar sind.

Aufgabe 3: **(10 + 15 = 25 Punkte)**

Sei σ eine beliebige Signatur. Betrachten Sie die Formelmenge

$$\Phi \quad := \quad \{\, v_0 = t \ : \ t \in T_\sigma \,\} \quad \cup \quad \{\, \exists v_0 \exists v_1 \neg\, v_0 = v_1 \,\}\,.$$

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Φ ist widerspruchsfrei.

(b) Es gibt keine Menge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \supseteq \Phi$, so dass Ψ widerspruchsfrei ist und Beispiele enthält.

Zur Information: Mit dieser Aufgabe zeigen Sie, dass in Lemma 1.39 die Forderung, dass $|\mathsf{VAR} \setminus \mathrm{frei}(\Phi)| = \infty$ ist, unverzichtbar ist.

... auf der Rückseite geht's weiter!

Aufgabe 4: **($12 + 13 = 25$ Punkte)**

Arbeiten Sie die am Ende der Beweise der Lemmas 1.39 und 1.40 ausgelassenen Details aus, d.h.:

(a) Zeigen Sie, dass Folgendes gilt: Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die im Beweis von Lemma 1.39 definierte Menge Ψ_n widerspruchsfrei, so ist auch die Menge $\Psi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n$ widerspruchsfrei.

(b) Beweisen Sie Behauptung 4 aus dem Beweis von Lemma 1.40, d.h. zeigen Sie, dass die im Beweis von Lemma 1.40 definierte Formelmenge Θ widerspruchsfrei ist.