

Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2016

Übungsblatt 2

Zu bearbeiten 12. Mai 2016

Aufgabe 1:

(25 Punkte)

Geben Sie eine Ableitung der Regel $\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)}$ im Sequenzenkalkül \mathfrak{K}_S an.

Aufgabe 2:

(10 + 15 = 25 Punkte)

Betrachten Sie die Regel

$$(\forall\exists) \frac{}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \forall x \varphi}$$

- (a) Prüfen Sie, ob die Regel $(\forall\exists)$ korrekt ist.
- (b) Sei \mathfrak{K}'_S der Kalkül, der aus dem Sequenzenkalkül \mathfrak{K}_S durch Hinzufügen der Regel $(\forall\exists)$ entsteht. Prüfen Sie, ob *jede* Sequenz in \mathfrak{K}'_S ableitbar ist.

Aufgabe 3:

(10 + 15 = 25 Punkte)

- (a) Geben Sie eine $\text{FO}[\sigma]$ Formel φ an für die $\varphi \neq \varphi_x^x$ gilt und erläutern Sie, warum dies in folgender Ableitung der Sequenz $\exists z \forall v \varphi \vdash \forall v \exists z \varphi$ ein Hindernis darstellt.
 - (1) $\varphi \vdash \varphi$ (V)
 - (2) $\varphi \vdash \exists z \varphi$ ($\exists S$) auf (1) mit $t := z$
 - (3) $\forall v \varphi \vdash \exists z \varphi$ ($\forall A$) auf (2) mit $t := v$
 - (4) $\forall v \varphi \vdash \forall v \exists z \varphi$ ($\forall S$) auf (3) mit $x := v$
 - (5) $\exists z \forall v \varphi \vdash \forall v \exists z \varphi$ ($\exists A$) auf (4) mit $y := z$
- (b) Geben Sie eine alternative Definition der *Anwendung einer σ -Substitution* an, für die das Substitutionslemma weiterhin gilt und gleichzeitig $\varphi = \varphi_x^x$ für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ sichergestellt ist.

Aufgabe 4:

(25 Punkte)

Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Berechnen Sie die reduzierte Termstruktur $[\mathcal{A}_\Phi]$ für die Formelmenge

$$\begin{aligned} \Phi &:= \{v_i = v_{i+2} : i \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} \\ &\cup \{E(v_0, v_7), E(v_1, v_4), E(v_6, v_0), \forall v_1 \forall v_3 (E(v_1, v_3) \rightarrow E(v_3, v_1))\}. \end{aligned}$$