

# Ausgewählte Kapitel der Logik

Sommersemester 2016

## Übungsblatt 1

Zu bearbeiten 28. April 2016

**Update: Aufgabe 4 wird auf das nächste Blatt verschoben.**

### Aufgabe 1:

(10 + 15 = 25 Punkte)

Sei  $\sigma_{\text{Graph}} = \{E\}$  und  $\sigma_{\text{Ar}} = \{+, \cdot, \leq, 0, 1\}$

- (a) Geben Sie FO[ $\sigma_{\text{Graph}}$ ]-Formeln an, die in einem endlichen gerichteten Graphen  $G$  folgende intuitive Bedeutung haben:
- (i)  $G$  enthält genau zwei isolierte Knoten. (*Zur Erinnerung:* Ein isolierter Knoten ist ein Knoten, der keinen Nachbarn besitzt)
  - (ii)  $G$  enthält keinen Kreis der Länge drei.
- (b) Geben Sie FO[ $\sigma_{\text{Ar}}$ ]-Formeln an, die im Standardmodell  $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$  der Arithmetik folgende intuitive Bedeutung haben:
- (i) Es gibt unendlich viele Sophie Germain Primzahlen, d.h. Primzahlen  $p$ , so dass  $2p + 1$  auch prim ist.
  - (ii) Jede Primzahl ist die Summe zweier Quadratzahlen.

### Aufgabe 2:

(5 + 5 + 15 = 25 Punkte)

- (a) Sei  $f$  ein zweistelliges Funktionssymbol und  $R, E$  zweistellige Relationssymbole. Berechnen Sie  $\varphi \frac{f(v_1, v_2), v_0}{v_0, v_3}$  und  $\psi \frac{v_1}{v_0}$  für
- (i)  $\varphi = \exists v_1 (R(v_0, v_2) \wedge \forall v_0 R(v_1, f(v_4, v_0)))$
  - (ii)  $\psi = \exists v_1 (E(v_0, v_1) \wedge (\exists v_0 (E(v_1, v_0) \wedge \exists v_1 E(v_0, v_1))))$
- (b) Beweisen Sie das *Substitutionslemma für Formeln* aus der Vorlesung. Das Substitutionslemma für Terme darf dabei verwendet werden.

### Aufgabe 3:

(25 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgende Regel des Sequenzkalküls  $\mathfrak{K}_S$  korrekt ist.

$$(\exists A) : \frac{\Gamma, \varphi \frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \psi} \quad \text{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \exists x \varphi, \psi)$$

### Aufgabe 4:

(25 Punkte)

Geben Sie eine Ableitung der Regel  $\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)}$  im Sequenzkalkül  $\mathfrak{K}_S$  an.