Abschnitt 3.2:

Der Satz von Ehrenfeucht

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass ein enger Zusammenhang zwischen EF-Spielen und der Ausdrucksstärke der Logik erster Stufe besteht. Zur Formulierung dieses Zusammenhangs ist der folgende Begriff der m-Äquivalenz nützlich.

Zur Erinnerung:
Die Quantorentiefe bzw. der Quantorenrang $\mathrm{qr}(\varphi)$ einer Formel φ ist die maximale Anzahl von ineinander geschachtelten Quantoren, die in φ vorkommen.

Die m-Äquivalenz zweier Strukturen (kurz: $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$)

Definition 3.8

Sei σ eine Signatur, seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen und sei $m \in \mathbb{N}$.

(a) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen *m-äquivalent* (kurz: $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$), falls sie die gleichen FO[σ]-Sätze der Quantorentiefe $\leqslant m$ erfüllen, d.h. falls für alle FO[σ]-Sätze φ mit $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi.$$

(b) Allgemein schreiben wir für $k \in \mathbb{N}$ und Elemente $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$$

und sagen, dass $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ m-äquivalent sind, falls für alle FO[σ]-Formeln φ mit höchstens k freien Variablen und mit Quantorentiefe $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}].$$

Anschaulich bedeutet $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$ also, dass $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ sich durch FO-Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$ nicht unterscheiden lassen (d.h., sie sehen aus Sicht dieser Formeln identisch aus).

Der Satz von Ehrenfeucht

Theorem 3.9 (Der Satz von Ehrenfeucht)

Sei σ eine endliche relationale Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$. Dann gilt:

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b}) \quad \iff \quad (\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}).$$

D.h.: Duplicator hat genau dann eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ nicht durch FO[σ]-Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$ unterschieden werden können.

Umgekehrt heißt dies: Spoiler hat genau dann eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn es eine FO[$\sigma$]-Formel der Quantorentiefe $\leqslant m$ gibt, die in $(\mathcal{A}, \overline{a})$ gilt, aber nicht in $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

Wir werden den Satz von Ehrenfeucht durch eine Folge von Hilfssätzen beweisen. Vorher betrachten wir jedoch kurz eine Anwendung des Satzes von Ehrenfeucht.

Eine Anwendung des Satzes von Ehrenfeucht

Aus der Richtung „$\Longrightarrow$“ des Satzes von Ehrenfeucht (Theorem 3.9) und der Richtung „$\Longleftarrow$“ von Satz 3.7 (Gewinnstrategie auf linearen Ordnungen) folgt direkt:

Satz 3.10 (Endliche lineare Ordnungen gerader Kardinalität)

Es gibt <u>*keinen*</u> FO[$\leqslant$]*-Satz* ψ*, so dass für alle endlichen linearen Ordnungen* $\mathcal{B}$ *gilt:* $\mathcal{B} \models \psi \iff |B|$ *ist gerade.*

Beweis der Richtung „$\Longrightarrow$“ des Satzes von Ehrenfeucht

Die Richtung „$\Longrightarrow$“ folgt direkt aus dem nächsten Satz, dessen Aussage die Kontraposition der Richtung „$\Longrightarrow$“ von Theorem 3.9 darstellt.

Satz 3.11

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und sei $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$.

Falls es eine FO[σ]*-Formel* $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ *mit* $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ *und* $\text{qr}(\varphi) \leqslant m$ *gibt, so dass*

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k] \qquad \textit{und} \qquad \mathcal{B} \not\models \varphi[b_1, \ldots, b_k],$$

so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

Beweisidee:

Zunächst illustrieren wir die Beweisidee an einem Beispiel. Betrachte dazu die Formel

$$\varphi \;:=\; \exists x_1 \forall x_2 \left(x_1 = x_2 \;\vee\; E(x_1, x_2) \right)$$

und die beiden Graphen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ aus Beispiel 3.2(a).

Es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$, d.h. $\mathcal{B} \models \neg\varphi$.

Beweis von Satz 3.11:

Per Induktion über den Aufbau von Formeln. Es seien eine relationale Signatur σ und zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gegeben. Die Aussage $\mathbb{A}(\varphi)$, die wir für alle FO[σ]-Formeln φ beweisen wollen, besagt Folgendes:

> *Für alle $m, k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und alle $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$ gilt:*
>
> *Falls* $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$ *und* $|\,\mathrm{frei}(\varphi)| \leqslant k$ *und*
>
> $$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[b_1, \ldots, b_k],$$
>
> *so hat* Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

Um $\mathbb{A}(\varphi)$ für eine gegebene Formel φ zu beweisen, seien im Folgenden $m, k \in \mathbb{N}$, $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$ beliebig gewählt.
Es genügt, den Fall zu betrachten, in dem gilt:

$$(*): \quad m \geqslant \mathrm{qr}(\varphi), \quad k \geqslant |\,\mathrm{frei}(\varphi)| \quad \text{und} \quad \mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[\overline{b}],$$

denn andernfalls muss gemäß der Formulierung von $\mathbb{A}(\varphi)$ nichts gezeigt werden.

Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$“ des Satzes von Ehrenfeucht

Zum Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$“ von Theorem 3.9 nutzen wir die wie folgt definierten Hintikka-Formeln.

Definition 3.12 (Hintikka-Formeln)

Sei σ eine endliche relationale Signatur, sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ eine Folge von Elementen aus A und sei $\overline{x} := x_1, \ldots, x_k$ eine Folge von k verschiedenen FO-Variablen.

Wir definieren rekursiv für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$, die wir als m-Hintikka-Formel (bzw. m-Isomorphietyp) von $\overline{a}$ in $\mathcal{A}$ bezeichnen, wie folgt:

- $\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$ ist die Konjunktion aller Formeln ψ, für die gilt:
  ψ ist eine atomare oder eine negierte atomare FO[σ]-Formel mit $\text{frei}(\psi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$, so dass $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$.

  Beachte: Da σ endlich ist, gibt es nur endlich viele solche Formeln ψ.

- Für $m > 0$ setzen wir

$$\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \quad := \quad \Big(\bigwedge_{a' \in A} \exists x_{k+1} \; \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1}) \Big) \quad \wedge \quad \forall x_{k+1} \bigvee_{a' \in A} \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1}) \,.$$

  Präzise ist mit $\bigwedge_{a' \in A} \exists x_{k+1} \; \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1})$ gemeint, dass wir für die Menge $M := \{ \exists x_{k+1} \; \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1}) \; : \; a' \in A \}$ die Konjunktion bilden, in der jede Formel aus M genau einmal vorkommt.
  Analoges gilt auch für $\bigvee_{a' \in A} \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1})$.

Bemerkung 3.13

(a) Für alle endlichen relationalen Signaturen σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$m\text{-Typen}_k[\sigma] \quad := \quad \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \ : \ \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur} \\ \text{und } \ \overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A \end{array} \right\}$$

endlich.

Für $m = 0$ gilt das, da es nur endlich viele verschiedene atomare FO[σ]-Formeln über den Variablen $x_1, \ldots, x_k$ gibt.
Für $m > 0$ folgt die Endlichkeit dann per Induktion.

Insbes. folgt dadurch, dass auch für unendliche Strukturen A und $m > 0$ die Konjunktion $\bigwedge_{a' \in A}$ und die Disjunktion $\bigvee_{a' \in A}$ jeweils nur endlich viele verschiedene Formeln enthält.
Wir können daher die m-Hintikka-Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}$ als FO[σ]-Formel auffassen.

(b) Die m-Hintikka-Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}$ hat die Quantorentiefe m, und es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{a}]$.
Dies folgt leicht per Induktion nach m.

(c) In der Definition der m-Hintikka-Formeln ist $k = 0$ erlaubt. Die m-Hintikka-Formel ist dann ein FO[σ]-Satz $\varphi^m_{\mathcal{A}}$ der Quantorentiefe m, für den gilt: $\mathcal{A} \models \varphi^m_{\mathcal{A}}$.

Die für den Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$“ von Theorem 3.9 zentrale Beobachtung wird im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 3.14 (Hintikka-Formeln beschreiben Gewinnstrategien für Duplicator)

Sei σ eine endliche relationale Signatur, seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, seien $k, m \in \mathbb{N}$ und seien $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$. Dann gilt:

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b}) \quad \iff \quad \mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]\,.$$

Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$“ von Theorem 3.9:

Gemäß Voraussetzung gilt $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, d.h. $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ erfüllen dieselben FO[σ]-Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$.

Da die m-Hintikka-Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$ die Quantorentiefe m hat, und da $\mathcal{A} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{a}]$ gilt (siehe Bemerkung 3.13), gilt auch $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$.

Gemäß der Richtung „$\Longleftarrow$“ von Satz 3.14 gilt also $(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b})$. $\square$