Kapitel 3:

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

In diesem Kapitel werden Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele (kurz: EF-Spiele) eingeführt. Diese liefern ein Werkzeug, mit dessen Hilfe man zeigen kann, dass bestimmte Anfragen oder Klassen von Strukturen nicht in bestimmten Logiken definiert werden können.

Der Einfachheit halber betrachten wir hier meistens nur Signaturen, die keine Funktionssymbole und keine Konstantensymbole enthalten. Solche Signaturen werden im Folgenden relationale Signaturen genannt.

Außerdem werden wir im Folgenden bei zwei gegebenen Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ immer o.B.d.A. annehmen, dass ihre Universen disjunkt sind, d.h. $A \cap B = \emptyset$.

Abschnitt 3.1:

Das m-Runden EF-Spiel

Das m-Runden EF-Spiel

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen.

Für $k \in \mathbb{N}$ seien $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$ Folgen der Länge k von Elementen aus A bzw. B.

Sei $m \in \mathbb{N}$.

Das m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ (bzw. auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, falls $k = 0$ ist) wird gemäß folgender Spielregeln gespielt:

Spielregeln des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$

- Es gibt 2 Spieler, genannt Spoiler (kurz: *Sp*) und Duplicator (kurz: *Dupl*).
- Das Spielbrett besteht aus $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.
- Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

  In jeder Runde $i \in \{1, \dots, m\}$ geschieht Folgendes:

  1. Zunächst wählt Spoiler entweder ein Element in A, das im Folgenden mit a_{k+i} bezeichnet wird, oder er wählt ein Element in B, das im Folgenden mit b_{k+i} bezeichnet wird.

     Beachte: Insbes. kann Spoiler in jeder Runde neu entscheiden, in welcher der beiden Strukturen er ein Element wählen möchte.

  2. Danach antwortet Duplicator mit einem Element aus dem Universum der anderen Struktur, d.h. er wählt ein $b_{k+i} \in B$, falls Spoiler ein $a_{k+i} \in A$ gewählt hat, bzw. ein Element $a_{k+i} \in A$, falls Spoiler ein $b_{k+i} \in B$ gewählt hat.

  Nach Runde m ist die Partie beendet und der Gewinner wird wie folgt ermittelt:

Gewinnbedingung

Duplicator hat gewonnen, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) Für alle $j, j' \in \{1, \ldots, k+m\}$ gilt: $a_j = a_{j'} \iff b_j = b_{j'}$.

(2) Die Abbildung $\pi : \{a_1, \ldots, a_{k+m}\} \to \{b_1, \ldots, b_{k+m}\}$ mit

$$\pi(a_j) := b_j, \qquad \text{für jedes } j \in \{1, \ldots, k+m\}$$

ist ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ (siehe Definition 3.1).

Spoiler hat gewonnen, falls mindestens eine der beiden obigen Bedingungen verletzt ist.

Definition 3.1 (partieller Isomorphismus)

Sei σ eine relationale Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $X \subseteq A$. Eine Abbildung $\pi : X \to B$ heißt partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, falls gilt:

(1) π ist injektiv und

(2) für jedes $R \in \sigma$, für $r := \mathrm{ar}(R)$ und für alle $(x_1, \ldots, x_r) \in X^r$ gilt:

$$(x_1, \ldots, x_r) \in R^{\mathcal{A}} \iff (\pi(x_1), \ldots, \pi(x_r)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beispiel 3.2

Sei $\sigma := \{ E/2 \}$ und sei $k := 0$.

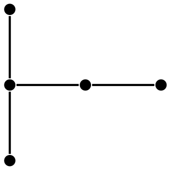
In den folgenden Darstellungen von Graphen repräsentiert jede ungerichtete Kante zwischen Knoten x, y die beiden gerichteten Kanten (x, y) und (y, x).

(a) Betrachte die folgenden beiden Graphen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

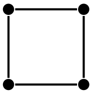
$\mathcal{A}$: $\mathcal{B}$:

(b) Betrachte die beiden folgenden Graphen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



Notation 3.3

Wir schreiben $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$, um das m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ zu bezeichnen.

Ist $k = 0$ (d.h. $\overline{a}$ und $\overline{b}$ sind leer), so schreiben wir kurz $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ an Stelle von $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.

Die Ziele von Spoiler und Duplicator

Die Gewinnbedingung im EF-Spiel ist so gewählt, dass die Ziele von Spoiler und Duplicator anschaulich folgendermaßen beschrieben werden können:

- Spoilers Ziel ist es, zu zeigen, dass die beiden Strukturen $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ verschieden sind.
- Duplicators Ziel ist es, einen etwaigen Unterschied zwischen den beiden Strukturen zu vertuschen.

Gewinnstrategien

Eine Strategie für einen der beiden Spieler im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ ist eine Vorschrift, die ihm sagt, welchen Zug er als Nächstes machen soll. Formal:

- Eine Strategie für Spoiler ist eine Abbildung

$$f_{Sp} \;:\; \bigcup_{i=0}^{m-1} (A \times B)^i \;\longrightarrow\; A \cup B.$$

  Sind $a_{k+1}, \ldots, a_{k+i} \in A$ und $b_{k+1}, \ldots, b_{k+i} \in B$ die in den ersten i Runden gewählten Elemente, so gibt

$$f_{Sp}(a_{k+1}, b_{k+1}, \ldots, a_{k+i}, b_{k+i})$$

  an, welches Element Spoiler in der $(i{+}1)$-ten Runde wählen soll.

- Eine Strategie für Duplicator ist eine Abbildung

$$f_{Dupl} \;:\; \bigcup_{i=0}^{m-1} (A \times B)^i \times (A \cup B) \;\longrightarrow\; B \cup A,$$

so dass für alle $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, alle $a_{k+1}, \ldots, a_{k+i} \in A$, alle $b_{k+1}, \ldots, b_{k+i} \in B$ und alle $c_{k+i+1} \in A \cup B$ gilt:

$$c_{k+i+1} \in A \quad \Longleftrightarrow \quad f_{Dupl}(a_{k+1}, b_{k+1}, \ldots, a_{k+i}, b_{k+i}, c_{k+i+1}) \;\in\; B.$$

Sind $a_{k+1}, \ldots, a_{k+i} \in A$ und $b_{k+1}, \ldots, b_{k+i} \in B$ die in den ersten i Runden und ist $c_{k+i+1} \in A \cup B$ das von Spoiler in Runde $i+1$ gewählte Element, so gibt

$$f_{Dupl}(a_{k+1}, b_{k+1}, \ldots, a_{k+i}, b_{k+i}, c_{k+i+1})$$

an, welches Element Duplicator in der $(i+1)$-ten Runde wählen soll.

- Eine Gewinnstrategie ist eine Strategie für einen der beiden Spieler, mit der er jede Partie des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ gewinnt.

Per Induktion nach der Rundenzahl m lässt sich leicht nachweisen, dass stets einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie besitzt:

Satz 3.4

Für alle relationalen Signaturen σ, alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, alle $k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$, alle $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in A$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: Genau einer der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.

Beweis: Übung. □

Definition 3.5

(a) Wir sagen

Spoiler (bzw. Duplicator) gewinnt $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$,

falls er eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ besitzt.

(b) Wir schreiben $(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, um auszudrücken, dass Duplicator eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ besitzt.

Ist $k = 0$ (d.h. $\overline{a}$ und $\overline{b}$ sind leer), so schreiben wir kurz $\mathcal{A} \approx_m \mathcal{B}$ an Stelle von $(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Beispiel 3.6

Betrachte die linearen Ordnungen $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (B, \leqslant^{\mathcal{B}})$ mit $A = \{1, \ldots, 8\}$ und $B = \{1, \ldots, 9\}$, wobei $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ die natürlichen linearen Ordnungen auf A und B sind.

Seien außerdem $k := 2$ und $\overline{a} := a_1, a_2$ und $\overline{b} := b_1, b_2$ mit $a_1 = b_1 = 1$ und $a_2 = 8$ und $b_2 = 9$ vorgegeben.

Frage: Was ist die größte Zahl m, so dass gilt: $(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b})$?

Dies lässt sich zu folgender Aussage verallgemeinern:

Satz 3.7

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ endliche lineare Ordnungen, sei $k := 2$, und sei $\overline{a} := a_1, a_2$ und $\overline{b} := b_1, b_2$, wobei a_1, b_1 die kleinsten und a_2, b_2 die größten Elemente in A und B bezüglich $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ sind.

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b}) \quad \Longleftrightarrow \quad |A| = |B| \text{ oder } |A|, |B| > 2^m.$$

D.h.: Duplicator hat genau dann eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn die Kardinalität von A und B gleich ist oder größer ist als 2^m.

Wir zeigen nun, dass Duplicator so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ die folgende Invariante $(*)_i$ erfüllt ist:

$(*)_i$: Sind $a_{2+1}, \ldots, a_{2+i}$ und $b_{2+1}, \ldots, b_{2+i}$ die in den Runden $1, \ldots, i$ gewählten Elemente in A und B, so gilt für alle $j, j' \in \{1, \ldots, 2+i\}$:

1. $a_j \leqslant^{\mathcal{A}} a_{j'} \iff b_j \leqslant^{\mathcal{B}} b_{j'}$ und
2. $Dist(a_j, a_{j'}) = Dist(b_j, b_{j'})$ oder $Dist(a_j, a_{j'}), Dist(b_j, b_{j'}) \geqslant 2^{m-i}$.

Der Beweis folgt per Induktion nach i.

„$\Longrightarrow$“:

Offensichtlich genügt es, Folgendes zu zeigen:

> *Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leqslant 2^m$, so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.*

Dies kann man beweisen, indem man zeigt, dass Spoiler so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ die folgende Invariante $(**)_i$ erfüllt ist.

$(**)_i$: Sind $a_{2+1}, \ldots, a_{2+i}$ und $b_{2+1}, \ldots, b_{2+i}$ die in den Runden $1, \ldots, i$ gewählten Elemente in A und B, so gibt es $j, j' \in \{1, \ldots, 2+i\}$, so dass gilt:

1. $\big(\ a_j <^{\mathcal{A}} a_{j'}$ und $b_j \geqslant^{\mathcal{B}} b_{j'}\ \big)$ oder $\big(\ a_j \geqslant^{\mathcal{A}} a_{j'}$ und $b_j <^{\mathcal{B}} b_{j'}\ \big)$

   oder

2. $\mathit{Dist}(a_j, a_{j'}) < 2^{m-i}$ und $\mathit{Dist}(a_j, a_{j'}) < \mathit{Dist}(b_j, b_{j'})$.

Details: Übung.