

Logik und Komplexität

Sommersemester 2015

Übungsblatt 12

Zu bearbeiten bis 15. Juli 2015

Aufgabe 1:

(10 + 10 = 20 Punkte)

- (a) Welche Klasse gerichteter endlicher Graphen wird von folgendem LFP[E]-Satz φ definiert?

$$\varphi := \forall x \left[\text{Ifp}_{P,x} \forall y \left(P(y) \vee \neg E(y, x) \right) \right](x).$$

- (b) Geben Sie einen LFP[E]-Satz an, der von genau denjenigen endlichen ungerichteten Graphen erfüllt wird, die bipartit sind.

Aufgabe 2:

(10 + 10 + 10 = 30 Punkte)

Wir erhalten die Logik MLFP („Monadische kleinste Fixpunktlogik“), indem wir in LFP-Formeln die Verwendung von Formeln der Form $[\text{Ifp}_{R,\vec{x}} \varphi](\vec{t})$ auf einstellige Relationen R beschränken.

- (a) Sei $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Geben Sie eine MLFP[$<$]-Formel $\varphi_m(x)$ an, die in einer endlichen geordneten Struktur besagt, dass der Rang von x ein Vielfaches von m ist.
- (b) Zeigen Sie, dass für jedes endliche Alphabet Σ und jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gilt:
Wenn L MLFP-definierbar ist, dann ist L auch regulär.
- (c) Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeigen Sie:
Jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^+$ ist MLFP-definierbar.

Hinweis: Für einen gegebenen deterministischen endlichen Automaten A mit Zustandsmenge $Q := \{0, \dots, m-1\}$ wollen wir einen MLFP-Satz φ_A angeben, der ausdrückt, dass der Lauf von A auf einem Eingabewort w akzeptierend ist. Da es nicht ohne Weiteres möglich ist (im Gegensatz zum Beweis des Satzes von Büchi) jede Position von w mit dem Zustand zu markieren, den A an der Position erreicht, müssen wir uns ein anderes Vorgehen überlegen. Wir zerlegen ein Wort w in zusammenhängende Teilwörter der Länge m und ein Suffix der Länge $< m$ (falls $|w|$ nicht durch m teilbar ist). D.h. $w = w_1 \dots w_\ell w_{\ell+1}$, wobei $\ell := \lfloor \frac{|w|}{m} \rfloor$ und $|w_i| = m$ für alle $i \leq \ell$. Wir markieren nun jedes der Teilwörter w_i mit dem Zustand, den A auf dem Präfix $w_1 \dots w_{i-1}$ erreicht. D.h. wir definieren induktiv eine unäre Relation, die für jedes $i \leq \ell$ und $q \in Q$ aus dem Teilwort w_i genau dann die q -te Position enthält, wenn A bei Eingabe von $w_1 \dots w_{i-1}$ den Zustand q erreicht. Mit Hilfe dieser Relation kann man nun leicht den gesuchten Satz φ_A konstruieren.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3:**(15 + 10 = 25 Punkte)**

Sei Σ ein endliches Alphabet. Jeden Σ -Baum t identifizieren wir mit der auf Blatt 2 definierten τ_Σ -Struktur $\mathfrak{A}_t$.

- (a) Geben Sie eine LFP[τ_Σ]-Formel $\varphi_{\text{Ord}}(x, y)$ an, die in jedem Σ -Baum t eine lineare Ordnung definiert (d.h. $\varphi_{\text{Ord}}(\mathfrak{A}_t)$ ist eine lineare Ordnung auf dem Universum von $\mathfrak{A}_t$).
- (b) Zeigen Sie: LFP beschreibt die Komplexitätsklasse P auf der Klasse aller Σ -Bäume.

Aufgabe 4:**(10 + 15 = 25 Punkte)**

Wir betrachten eine Variante des bekannten *Spiels des Lebens* von J.H. Conway, die auf gerichteten Graphen gespielt wird. Sei E ein zweistelliges und L ein einstelliges Relationssymbol und sei $\sigma := \{E, L\}$. Für jede σ -Struktur $\mathfrak{A}$ definieren wir eine Abbildung $F_{\mathfrak{A}} : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$, so dass $F_{\mathfrak{A}}(\emptyset) = L^{\mathfrak{A}}$ und so dass für jede Menge $M \subseteq A$ und alle $a \in A$ genau dann gilt, dass $a \in F_{\mathfrak{A}}(M)$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $a \in M$ und es gibt genau zwei verschiedene $v \in M$ mit $(a, v) \in E^{\mathfrak{A}}$.
- Es gibt genau drei verschiedene Knoten $v \in M$, so dass $(a, v) \in E^{\mathfrak{A}}$.

Wir sagen, dass $\mathfrak{A}$ *ausstirbt*, wenn eine der Induktionsstufen von $F_{\mathfrak{A}}$ die leere Menge ist (d.h. es gibt ein $i \geq 1$, so dass $F_{\mathfrak{A}}^i(\emptyset) = \emptyset$).

- (a) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Funktion $F_{\mathfrak{A}}$ hat für jede endliche σ -Struktur $\mathfrak{A}$ einen Fixpunkt.
- (b) Zeigen Sie: Die Klasse aller endlichen σ -Strukturen $\mathfrak{A}$, die aussterben, ist PFP[σ]-definierbar in der Klasse aller endlichen σ -Strukturen.