Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

1. Juli 2015

Logik und Komplexität

Sommersemester 2015

Übungsblatt 11

Zu bearbeiten bis 8. Juli 2015

Aufgabe 1: **((10 + 10) + 10 = 30 Punkte)**

(a) Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei $\mathcal{G}_{k,\ell}$ das in Beispiel 3.22 definierte $(k \times \ell)$-Gitter. Sei *Diag* die *einstellige* Anfrage, die jedem Gitter $\mathcal{G}_{k,\ell}$ die Diagonale

$$\mathit{Diag}(\mathcal{G}_{k,\ell}) \quad := \quad \{(i,i) \ : \ 1 \leqslant i \leqslant \min(k,\ell)\}$$

zuordnet.

Geben Sie mindestens zwei verschiedene Beweise an, die zeigen, dass die Anfrage *Diag* nicht FO-definierbar ist.

(b) Aus der Vorlesung wissen Sie, dass für jede endliche relationale Signatur σ, jede Klasse S von σ-Strukturen und jede Anfrage Q gilt:

$$Q \text{ ist FO}[\sigma]\text{-definierbar auf S} \quad \Longrightarrow \quad Q \text{ ist Gaifman-lokal auf S.}$$

Gilt auch die Umkehrung? D.h. gilt für jede Anfrage Q:

$$Q \text{ ist Gaifman-lokal auf S} \quad \Longrightarrow \quad Q \text{ ist FO}[\sigma]\text{-definierbar auf S ?}$$

Belegen Sie Ihre Antwort, indem Sie entweder beweisen, dass die Umkehrung gilt, oder indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Sei $\tilde{\varphi}$ die in dem in der Vorlesung vorgestellten Beweis des Satzes von Gaifman bei Eingabe einer FO$[\sigma]$-Formel φ erzeugte Formel in Gaifman-Normalform. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

- Jeder in $\tilde{\varphi}$ vorkommende basis-lokale Satz hat Parameter ℓ, r mit $\ell \leqslant q{+}k$ und $r \leqslant 7^q$, und
- jede in $\tilde{\varphi}$ vorkommende Formel $\psi(\vec{x})$, die lokal um die freien Variablen $\vec{x} = x_1, \ldots, x_k$ von φ ist, ist r-lokal um $\vec{x}$ für eine Zahl $r \leqslant 7^q$,

wobei q die Quantorentiefe von φ und k die Anzahl der freien Variablen von φ ist.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Finden Sie einen auf dem Satz von Hanf beruhenden Beweis der folgenden Variante des Satzes von Seese:

Für jede Zahl $d \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und jeden FO[E]-Satz φ gibt es einen Algorithmus, der das

> AUSWERTUNGSPROBLEM FÜR φ AUF DER KLASSE ALLER ENDLICHEN GRAPHEN VOM GRAD $\leqslant d$
>
> *Eingabe:* Ein endlicher gerichteter Graph G vom Grad $\leqslant d$
>
> *Frage:* Gilt $G \models \varphi$?

in Zeit $\mathcal{O}(n)$ löst, wobei $n = |V^G| + |E^G|$ für $G = (V^G, E^G)$ ist.

Aufgabe 4: **($4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$ Punkte)**

Zeigen Sie:

(a) Es gibt Abbildungen, die weder monoton noch inflationär sind.

(b) Es gibt Abbildungen, die monoton, aber nicht inflationär sind.

(c) Es gibt Abbildungen, die inflationär, aber nicht monoton sind.

(d) Es gibt Abbildungen, die keinen Fixpunkt besitzen.

(e) Es gibt Abbildungen, die induktiv, aber weder monoton noch inflationär sind.