Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

24. Juni 2015

Logik und Komplexität

Sommersemester 2015

Übungsblatt 10

Zu bearbeiten bis 1. Juli 2015

Aufgabe 1: **(10 + 15 = 25 Punkte)**

Sei Conn die Klasse aller zusammenhängenden endlichen ungerichteten Graphen und sei UGraphs die Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen.

(a) Zeigen Sie, dass Conn nicht $\mathrm{L}^2_{\infty\omega}[E]$-definierbar in UGraphs ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Conn ist $\mathrm{L}^\omega_{\infty\omega}[E]$-definierbar in UGraphs.

Aufgabe 2: **(10 + 15 = 25 Punkte)**

Stellen Sie für jede der beiden folgenden Formeln fest, ob sie in Gaifman-Normalform ist. Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls eine äquivalente Formel in Gaifman-Normalform an.

(a) $\varphi_1(x) \quad := \quad \forall y\, E(x,y)$

(b) $\varphi_2(x_1,x_2) \quad := \quad \neg x_1{=}x_2 \wedge \forall y \Big(E(x_1,y) \vee E(x_2,y)\Big)$

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Betrachten Sie das folgende Problem:

> Lokalität
>
> *Eingabe:* Eine endliche relationale Signatur σ, eine natürliche Zahl $k \geqslant 1$, eine FO[σ]-Formel $\varphi(x_1, ..., x_k)$, eine natürliche Zahl $r \geqslant 0$.
>
> *Frage:* Ist φ r-lokal um $x_1, ..., x_k$?

Ist das Problem entscheidbar?

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist, indem Sie entweder einen Algorithmus angeben, der das Problem löst (inkl. Laufzeitanalyse) oder die Unentscheidbarkeit des Problems nachweisen.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 4: **(10 + 15 = 25 Punkte)**

(a) Sei M eine endliche Menge von Formeln. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der bei Eingabe einer beliebigen Formel $\varphi \in \mathrm{BC}(M)$ eine zu φ äquivalente Formel in disjunktiver Normalform ausgibt, d.h. eine Formel der Form

$$\bigvee_{i \in I} \left(\bigwedge_{j \in J_i} \psi_{i,j} \right),$$

wobei I und $(J_i)_{i \in I}$ endliche Indexmengen sind und $\psi_{i,j} \in M \cup \{\neg\chi : \chi \in M\}$, für alle $i \in I$ und alle $j \in J_i$.

(b) Entwickeln Sie einen Algorithmus, der bei Eingabe von zwei Zahlen $k, r \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und einer FO[σ]-Formel $\psi(x_1, \ldots, x_k, y)$, die r-lokal um $x_1, \ldots, x_k, y$ ist, eine FO[σ]-Formel $\tilde{\psi}(x_1, \ldots, x_k, y)$ ausgibt, für die gilt:

(I) $\tilde{\psi}(x_1, \ldots, x_k, y)$ ist eine Boolesche Kombination von

(i) Formeln, die r-lokal um $x_1, \ldots, x_k$ sind, und

(ii) Formeln, die r-lokal um y sind,

und

(II) für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle $a_1, \ldots, a_k, b \in A$ mit $\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(b, \{a_1, \ldots, a_k\}) > 2r + 1$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \tilde{\psi}[a_1, \ldots, a_k, b] \iff \mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_k, b].$$