Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

16. Juni 2015

Logik und Komplexität

Sommersemester 2015

Übungsblatt 9

Zu bearbeiten bis 24. Juni 2015

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Teil (a) von Lemma 4.10 der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass für jede endliche relationale Signatur σ, für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und alle $F \subseteq \Delta^{\sigma}_{\ell+1}$ gilt:

$$\mu(\mathrm{EA}_{\ell,F} \mid \textsc{All}(\sigma)) = 1.$$

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Teil (b) von Lemma 4.10 der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass für jede endliche relationale Signatur σ, jedes $k \geqslant 1$ und alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, die jedes Erweiterungsaxiom $\mathrm{EA}_{\ell,F}$ mit $\ell \leqslant k$ und $F \subseteq \Delta^{\sigma}_{\ell+1}$ erfüllen, gilt: $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen die gleichen FO[σ]-Sätze vom Quantorenrang $\leqslant k$.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Theorem 4.24, d.h. zeigen Sie, dass Duplicator genau dann eine Gewinnstrategie im k-Pebble Spiel auf $(\mathfrak{A}, \vec{a})$ und $(\mathfrak{B}, \vec{b})$ hat, wenn $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_{\mathrm{L}^k_{\infty\omega}} (\mathfrak{B}, \vec{b})$ gilt.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Lemma 4.26, d.h. zeigen Sie, dass Folgendes gilt: Sei $k \geqslant 1$ und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei ungerichtete Graphen, die das Erweiterungsaxiom $\mathrm{EA}_{\ell,m}$ für alle $\ell \geqslant 1$ und $m \geqslant 0$ mit $m \leqslant \ell < k$ erfüllen. Dann gilt $\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{L}^k_{\infty\omega}} \mathfrak{B}$.