Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

2. Juni 2015

Logik und Komplexität

Sommersemester 2015

Übungsblatt 7

Zu bearbeiten bis 10. Juni 2015

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass für jede Klasse S von σ-Strukturen und jede Klasse $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{S}$ gilt: [1]

$$\mathrm{C} \text{ ist FO-definierbar in S} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C} \text{ ist Hanf-lokal in S.}$$

Gilt auch die Umkehrung? D.h. gilt für jede Klasse S von σ-Strukturen und jede Klasse $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{S}$:

$$\mathrm{C} \text{ ist Hanf-lokal in S} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C} \text{ ist FO-definierbar in S ?}$$

Belegen Sie Ihre Antwort, indem Sie entweder beweisen, dass die Umkehrung gilt, oder indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

Aufgabe 2: **(15 + 10 = 25 Punkte)**

(a) Für $k, \ell \geqslant 0$ sei $\sigma_{k,\ell}$ die Signatur mit k unären Relationssymbolen $P_1, \ldots, P_k$ und ℓ Konstantensymbolen $c_1, \ldots, c_\ell$. Für jede $\sigma_{k,\ell}$-Struktur $\mathcal{A}$ sei die *Farbe* $c^{\mathcal{A}}(a) \subseteq \sigma_{k,\ell}$ eines Elementes $a \in A$ definiert als

$$c^{\mathcal{A}}(a) \;:=\; \{P_i \;:\; i \in \{1,\ldots,k\},\;\; a \in P_i^{\mathcal{A}}\} \;\cup\; \{c_j \;:\; j \in \{1,\ldots,\ell\},\;\; a = c_j^{\mathcal{A}}\}.$$

Für jede Farbe $f \subseteq \sigma_{k,\ell}$ sei

$$M_f^{\mathcal{A}} \;:=\; \{a \in A \;:\; c^{\mathcal{A}}(a) = f\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $k, \ell, m \geqslant 0$ und alle $\sigma_{k,\ell}$-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gilt:
Wenn für alle Farben $f \subseteq \sigma_{k,\ell}$ gilt, dass

$$|M_f^{\mathcal{A}}| = |M_f^{\mathcal{B}}| \quad \text{oder} \quad |M_f^{\mathcal{A}}|, |M_f^{\mathcal{B}}| \geqslant 2^m,$$

dann hat Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden MSO-Spiel auf $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Der Begriff "m-Runden MSO-Spiel" bezieht sich hier auf die Lösung von Aufgabe 4 auf Blatt 6.

(b) Folgern Sie, dass es für jeden MSO$[\sigma_{k,\ell}]$-Satz einen auf der Klasse aller $\sigma_{k,\ell}$-Strukturen äquivalenten FO$[\sigma_{k,\ell}]$-Satz gibt.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

[1] Wir sagen "C ist FO definierbar in S", falls es einen FO$[\sigma]$-Satz φ gibt, s.d. f.a. $\mathfrak{A} \in \mathrm{S}$ gilt: $\mathfrak{A} \in \mathrm{C} \iff \mathfrak{A} \models \varphi$

Aufgabe 3: **(10 + 15 = 25 Punkte)**

Für $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei k-Col die Klasse aller k-färbbaren endlichen Graphen.

Zeigen Sie:

(a) Es gibt keinen FO[E]-Satz φ, so dass für jeden endlichen gerichteten Graphen $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \in 2\text{-Col}$$

(b) Es gibt keinen FO[E]-Satz φ, so dass für jeden endlichen gerichteten Graphen $\mathfrak{A}$ gilt:

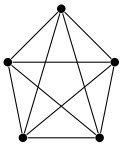
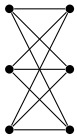
$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \in 3\text{-Col}$$

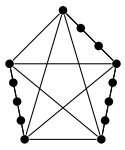
Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie, dass es keinen FO[E]-Satz φ gibt, so dass für jeden endlichen ungerichteten Graphen G und den zu G gehörenden gerichteten Graphen $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad G \text{ ist planar.}$$

Hinweis: Gemäß dem Satz von Kuratowski ist ein endlicher ungerichteter Graph G genau dann planar, wenn er keine Unterteilung eines der folgenden Graphen als Subgraphen enthält:

$K_5 :=$  $K_{3,3} :=$ 

Ein Graph G' geht durch Unterteilung einer Kante $e := \{u, v\} \in E$ aus $G = (V, E)$ hervor, falls $G' = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{\{u, w\}, \{w, v\}\})$ für einen Knoten $w \notin V$. Ein Graph U ist eine *Unterteilung* eines Graphen G, wenn es eine Folge $G_1, \ldots, G_\ell$ von Graphen mit $\ell \geqslant 1$ gibt, so dass gilt: $G_1 = G$, $G_\ell = U$, und für jedes $i \in \{2, \ldots, \ell\}$ geht G_i aus G_{i-1} durch Unterteilung einer Kante von G_{i-1} hervor.

Beispiel: Eine Unterteilung von K_5