Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

26. Mai 2015

Logik und Komplexität

Sommersemester 2015

Übungsblatt 6

Zu bearbeiten bis 3. Juni 2015

Aufgabe 1: **($10 + 10 + 15 = 35$ Punkte)**

(a) Arbeiten Sie die Details zu Beispiel 3.22 aus, d.h.:

Die Signatur $\sigma := \{S_v, S_h\}$ bestehe aus zwei 2-stelligen Relationssymbolen S_v und S_h (für „vertikale" und „horizontale" Kanten). Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist das $(k\times\ell)$-*Gitter* $\mathcal{G}_{k,\ell}$ die σ-Struktur mit Universum $\{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, \ell\}$ und Relationen

$$\begin{aligned} S_v^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \Big\{ \big((i,j),(i{+}1,j)\big) \ : \ 1 \leqslant i < k,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell \Big\}, \\ S_h^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \Big\{ \big((i,j),(i,j{+}1)\big) \ : \ 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j < \ell \Big\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es keinen FO$[\sigma]$-Satz φ gibt, der die Gitter *quadratischer* Größe beschreibt, d.h. bei dem für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gilt: $\mathcal{G}_{k,\ell} \models \varphi \iff k = \ell$.

(b) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und sei $L \subseteq T_\Sigma$ die Baumsprache, die aus allen Σ-Bäumen besteht, in der jedes Blatt gerade Höhe hat. Zeigen Sie, dass es keinen FO$[\tau_\Sigma]$-Satz φ gibt, so dass für jeden Σ-Baum t und die zu t gehörige τ_Σ-Struktur $\mathfrak{A}_t$ gilt:

$$t \in L \iff \mathfrak{A}_t \models \varphi$$

(c) Für jedes Alphabet Σ sei $\tau'_\Sigma := \tau_\Sigma \cup \{\text{desc}\}$, wobei desc ein zweistelliges Relationssymbol ist. Die τ'_Σ-Struktur $\mathfrak{B}_t$ ist eine Erweiterung der τ_Σ-Struktur $\mathfrak{A}_t$ um die Relation $\text{desc}^{\mathfrak{B}_t}$, wobei

$$(u, v) \in \text{desc}^{\mathfrak{B}_t} \iff v \text{ ist ein Nachkomme von } u.$$

Dabei ist $v \in B_t$ ein Nachkomme von $u \in B_t$ genau dann, wenn es einen Weg der Länge $\geqslant 1$ von u nach v in dem Graphen $(B_t, E_1^{\mathfrak{B}_t} \cup E_2^{\mathfrak{B}_t})$ gibt. Zeigen Sie, dass es einen FO$[\tau'_\Sigma]$-Satz φ gibt, so dass für jeden Σ-Baum t und die zu t gehörende τ'_Σ-Struktur $\mathfrak{B}_t$ gilt:

$$t \in L \iff \mathfrak{B}_t \models \varphi$$

wobei L die Baumsprache aus **(b)** ist.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 2: **($12 + 12 = 24$ Punkte)**

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{C}$ eine Klasse endlicher σ-Strukturen. Sei φ ein FO[σ]-Satz. Das *Spektrum von φ in $\mathcal{C}$* ist die Menge $\mathrm{SPEC}_{\mathcal{C}}(\varphi) := \{|A| \ : \ \mathfrak{A} \in \mathcal{C}\,, \mathfrak{A} \models \varphi\}$. Sei außerdem $\textsc{Ord}_{\leqslant}$ die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen und sei $\textsc{Fin}_{\sigma}$ die Klasse aller endlichen Strukturen über σ.

(a) Für welche Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ gibt es einen FO[$\leqslant$]-Satz φ, so dass $M = \mathrm{SPEC}_{\textsc{Ord}_{\leqslant}}(\varphi)$?

(b) Sei σ die leere Signatur (d.h. σ-Strukturen bestehen nur aus ihrem Universum). Für welche Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ gibt es einen FO[σ]-Satz φ, so dass $M = \mathrm{SPEC}_{\textsc{Fin}_{\sigma}}(\varphi)$?

Aufgabe 3: **($5 + 5 + 6 = 16$ Punkte)**

(a) Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie einen sternfreien regulären Ausdruck an, der die selbe Sprache beschreibt, wie der reguläre Ausdruck $b(a|b)^*aaab^*$.

(b) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie einen (möglichst einfachen) regulären Ausdruck an, der die selbe Sprache beschreibt, wie der sternfreie reguläre Ausdruck $\overline{b\overline{\emptyset} \mid \overline{\emptyset}a \mid \overline{\emptyset}aa\overline{\emptyset} \mid \overline{\emptyset}bb\overline{\emptyset}}$.

(c) Geben Sie eine reguläre Sprache an, die nicht sternfrei regulär ist und beweisen Sie, dass diese Sprache nicht sternfrei regulär ist.

Aufgabe 4: **($10 + 15 = 25$ Punkte)**

Sei σ eine endliche relationale Signatur.

(a) Definieren Sie Spielregeln und Gewinnbedingung eines *m-Runden* MSO-*Spiels*, so dass für alle $m \geqslant 0$ und alle σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

  (i) Es gibt einen MSO[σ]-Satz Φ vom Quantorenrang $\mathrm{qr}(\Phi) \leqslant m$, so dass $\mathcal{A} \models \Phi$ und $\mathcal{B} \not\models \Phi$.

  (ii) Spoiler hat eine Gewinnstrategie im m-Runden MSO-Spiel auf $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

(b) Beweisen Sie, dass die Aussagen **(i)** und **(ii)** äquivalent sind.