Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

12. Mai 2015

# Logik und Komplexität

Sommersemester 2015

# Übungsblatt 4

*Zu bearbeiten bis 20. Mai 2015*

**Aufgabe 1:** **(20 + 5 = 25 Punkte)**

Sei $\sigma$ eine Signatur. Im Beweis von Theorem 2.24 wird gezeigt, wie man zu einem ESO[$\sigma$]-Satz $\Phi$ und einer endlichen $\sigma$-Struktur $\mathfrak{A}$ eine aussagenlogische Formel $\alpha_{\Phi,\mathfrak{A}}$ konstruiert, für die gilt:

$$\mathfrak{A} \models \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_{\Phi,\mathfrak{A}} \text{ hat eine erfüllende Belegung.}$$

**(a)** Konstruieren Sie $\alpha_{\Phi,\mathfrak{A}}$ für den ESO[$E$]-Satz

$$\Phi := \exists X\Big(\exists x X(x) \ \wedge \ \exists y \neg X(y) \ \wedge \ \forall u \forall v\Big((X(u) \ \wedge \ \neg X(v)) \ \rightarrow \ (\neg E(u,v) \ \wedge \ \neg E(v,u))\Big)\Big)$$

und die $\{E\}$-Struktur

$$\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}}) \quad \text{mit} \quad A = \{1,2,3\} \quad \text{und} \quad E^{\mathfrak{A}} = \{(1,2),(3,3)\}.$$

**(b)** Hat die im Teil **(a)** konstruierte Formel $\alpha_{\Phi,\mathfrak{A}}$ eine erfüllende Belegung? Falls ja, geben Sie eine solche Belegung an; falls nein, begründen Sie, warum es keine solche Belegung gibt.

**Aufgabe 2:** **(25 Punkte)**

Zeigen Sie, dass das Problem $\text{Eval}_{\text{FIN}_<}(\Phi)$ für jeden ESO-HORN-Satz $\Phi$ in P liegt, d.h. es gibt einen deterministischen Algorithmus, der bei Eingabe einer endlichen Struktur $\mathfrak{A}$ in Polynomialzeit entscheidet, ob $\mathfrak{A} \models \Phi$.

*Zur Einnerung:* In der Vorlesung *Logik in der Informatik* wurde gezeigt, dass das Problem

| |
|---|
| HORN-SAT |
| *Eingabe:* Eine Konjunktion $\alpha$ von aussagenlogischen Horn-Klauseln. |
| *Frage:* Ist $\alpha$ erfüllbar? |

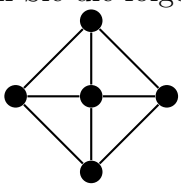
unter Verwendung des Streichungsalgorithmus deterministisch in Polynomialzeit gelöst werden kann.

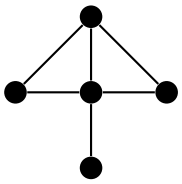
— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

**Aufgabe 3:** **(25 Punkte)**

Sei $\sigma := \{E/2\}$. In der folgenden Darstellung von Graphen repräsentiert jede ungerichtete Kante zwischen zwei Knoten $u$ und $v$ die beiden gerichteten Kanten $(u, v)$ und $(v, u)$.

Betrachten Sie die folgenden Graphen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$:

Graph $\mathfrak{A}$: 

Graph $\mathfrak{B}$: 

**(a)** Welches ist das kleinste $m$, so dass Spoiler eine Gewinnstrategie im $m$-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ hat? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie eine Gewinnstrategie für Spoiler im $m$-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel und eine Gewinnstrategie für Duplicator im $(m-1)$-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel beschreiben.

**(b)** Finden Sie für Ihre Antwort $m$ aus Teil **(a)** einen FO$[\sigma]$-Satz $\psi$ der Quantorentiefe $m$, so dass $\mathcal{A} \models \psi$ und $\mathcal{B} \models \neg\psi$.

**Aufgabe 4:** **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Satz 3.4, d.h. zeigen Sie:

Für alle relationalen Signaturen $\sigma$, alle $\sigma$-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, alle $k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$, alle $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in A$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

> Genau einer der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie im $m$-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

**Hinweis:** Per Induktion nach $m$ ist der Beweis einfach und kurz.