Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

5. Mai 2015

Logik und Komplexität

Sommersemester 2015

Übungsblatt 3

Zu bearbeiten bis 13. Mai 2015

Bemerkung: In den Aufgaben 3 und 4 wird der Satz von Doner (1970), Thatcher und Wright (1968) gezeigt, der Folgendes besagt:

> Sei Σ ein endliches (nicht-leeres) Alphabet und sei $L \subseteq T_\Sigma$ eine Baumsprache.
> Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
>
> **(a)** L ist regulär.
>
> **(b)** L ist EMSO-definierbar.
>
> **(c)** L ist MSO-definierbar.

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Sei Σ ein endliches Alphabet. Ist das folgende Problem entscheidbar? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Endliches Erfüllbarkeitsproblem für MSO$[\sigma_\Sigma]$ auf Worten
Eingabe: Ein MSO$[\sigma_\Sigma]$-Satz φ.
Frage: Gibt es ein $w \in \Sigma^+$, so dass $\mathfrak{A}_w \models \varphi$?

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Diese Aufgabe bezieht sich auf den Begriff der Σ-*Bäume*, die auf Blatt 1 eingeführt wurden. Die *Höhe* eines Σ-Baumes ist die maximale Höhe seiner Blätter, d.h. die maximale Anzahl von Kanten auf einem gerichteten Pfad von der Wurzel zu einem Blatt.

Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und sei $L \subseteq T_\Sigma$ die Baumsprache, die aus allen Σ-Bäumen *gerader* Höhe besteht.

Zeigen Sie, dass L nicht MSO-definierbar ist.

Hinweis: Wie im Beweis von Satz 2.17 der Vorlesung („Hamiltonkreis ist nicht MSO-definierbar“) können Sie hierfür eine logische Reduktion verwenden. Außerdem können Sie auf beliebige Tatsachen über reguläre Sprachen zurückgreifen, wie sie in einer einführenden Vorlesung zu dem Thema behandelt werden — z.B. dass die Sprache $\{c^n d^m \ : \ n, m \in \mathbb{N},\ n < m\} \subseteq \{c, d\}^*$ nicht regulär ist.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Sei Σ ein (nicht-leeres) endliches Alphabet.
Zeigen Sie: Jede reguläre Baumsprache $L \subseteq T_\Sigma$ ist MSO-definierbar.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Sei Σ ein (nicht-leeres) endliches Alphabet.
Zeigen Sie: Jede MSO-definierbare Baumsprache $L \subseteq T_\Sigma$ ist regulär.