Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

28. April 2015

Logik und Komplexität

Sommersemester 2015

Übungsblatt 2

Zu bearbeiten bis 6. Mai 2015

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie folgende Verschärfung des Satzes von Trakhtenbrot:

Sei $\sigma_{\text{Graph}} := \{E\}$ die Signatur, die aus einem zweistelligen Relationssymbol E besteht. Das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma_{\text{Graph}}]$ ist unentscheidbar.

Hinweis: Verwenden Sie dazu Aufgabe 2 auf Blatt 1. Überlegen Sie sich eine geeignete Repräsentation von Strukturen über einer binären Signatur σ durch gerichtete Graphen (d.h. $\{E\}$-Strukturen).

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein 2-stelliges Relationssymbol enthält, sei $r \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei R ein r-stelliges Relationssymbol mit $R \notin \sigma$.

Eine $\text{FO}[\sigma \dot\cup \{R\}]$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ heißt *im Endlichen monoton in* R, wenn für alle endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle Relationen $R_1^{\mathfrak{A}}, R_2^{\mathfrak{A}} \subseteq A^r$ gilt:

$$\text{Falls} \quad R_1^{\mathfrak{A}} \subseteq R_2^{\mathfrak{A}}, \quad \text{so} \quad \varphi\Big(\mathfrak{A}, R_1^{\mathfrak{A}}\Big) \subseteq \varphi\Big(\mathfrak{A}, R_2^{\mathfrak{A}}\Big),$$

wobei $\varphi(\mathfrak{A}, R_i^{\mathfrak{A}}) := \{\bar{a} \in A^r \ : \ (\mathfrak{A}, R_i^{\mathfrak{A}}) \models \varphi[\bar{a}]\}$.

Beweisen Sie, dass das folgende Problem unentscheidbar ist.

> Monotonie im Endlichen:
>
> *Eingabe:* Eine $\text{FO}[\sigma \dot\cup \{R\}]$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$.
>
> *Frage:* Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ im Endlichen monoton in R?

Hinweis: Benutzen Sie die in Aufgabe 1 bewiesene Version des Satzes von Trakhtenbrot.

Aufgabe 3: **(13 + 12 = 25 Punkte)**

Beweisen Sie die Aussagen (b) und (d) aus Lemma 2.14 der Vorlesung, d.h. konstruieren Sie die gesuchten nichtdeterministischen endlichen Automaten $\mathbb{A}_{le(X_i,X_j)}$ und $\mathbb{A}_{symb_a(X_i)}$.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Die für diese Aufgabe nötigen Definitionen zu Baumautomaten und regulären Baumsprachen finden Sie auf der Rückseite von Blatt 1 und am Ende und alternativ auf den Folien aus der Übung vom 22. April.

(a) Sei L die Baumsprache aus Aufgabe 4(a) von Blatt 1. Zeigen Sie, dass L MSO-definierbar ist.

(b) Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:
Wenn $L \subseteq T_\Sigma$ regulär ist, so ist auch die Baumsprache $\overline{L} := \{t \in T_\Sigma \ : \ t \notin L\}$ regulär.

Definitionen

Σ-Bäume und Logik. Zur Repräsentation von Σ-Bäumen durch logische Strukturen nutzen wir die Signatur $\tau_\Sigma := \{E_1, E_2\} \cup \{P_a \ : \ a \in \Sigma\}$, wobei E_1 und E_2 2-stellige und alle P_a 1-stellige Relationssymbole sind. Ist t ein Σ-Baum mit Knotenmenge $V(t)$, Kantenmengen $E_1(t)$ und $E_2(t)$ und Beschriftungsfunktion λ, so repräsentieren wir t durch die τ_Σ-Struktur $\mathfrak{A}_t$ mit dem Universum $V(t)$ und den Relationen $E_i^{\mathfrak{A}_t} := E_i(t)$ (für jedes $i \in \{1, 2\}$) und $P_a^{\mathfrak{A}_t} := \{v \in V(t) \ : \ \lambda(v) = a\}$ (für jedes $a \in \Sigma$). Ein SO[τ_Σ]-Satz φ *beschreibt* eine Baumsprache L, wenn gilt: $L = \{t \in T_\Sigma \ : \ \mathfrak{A}_t \models \varphi\}$. Eine Baumsprache $L \subseteq T_\Sigma$ heißt *MSO-definierbar*, wenn es einen MSO[τ_Σ]-Satz gibt, der L beschreibt.