Einbettungen und Minoren von Graphen

Vorlesung an der
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
im Wintersemester 1999/2000 (2-stündig)

Martin Grohe
22. Februar 2000

Inhaltsverzeichnis

Notation

Allgemeines

Wir verwenden die üblichen Bezeichnungen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ für die Menge der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen bzw. komplexen Zahlen. '0' ist nicht in $\mathbb{N}$ enthalten, wir setzen $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Sei M eine Menge. Dann bezeichnet $|M|$ die Mächtigkeit von M. Weiterhin bezeichnet $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Für alle $k \geq 1$ bezeichnet $\mathcal{P}_k(M)$ die Menge aller k-elementigen Teilmengen von M und $\mathcal{P}_{\leq k}(M)$ die Menge aller höchstens k-elementigen Teilmengen von M. Mit $M \subset N$ meinen wir $M \subseteq N$ und $M \neq N$.
Um Multimengen von Mengen unterscheiden zu können, schreiben wir sie mit Doppelklammern, wie zum Beispiel

$$\{\!\{1, 2, 2, 2, 3, 4, 4\}\!\}.$$

Graphen und Teilgraphen

Ein Graph G ist ein Paar (V^G, E^G) bestehend aus einer endlichen Eckenmenge V^G und einer Kantenmenge $E^G \subseteq \mathcal{P}_2(V^G)$. Ein Multigraph G ist ein Paar (V^G, E^G), wobei wiederum V^G eine endliche Menge ist und $E^G \subseteq \mathcal{P}_1(V^G) \cup \mathcal{P}_2(V^G)$ eine Multimenge. Graphen sind also immer einfach, in Multigraphen sind Schleifen und Mehrfachkanten erlaubt. Der Einfachheit halber nehmen wir immer an, daß Ecken- und Kantenmenge eines Graphen oder Multigraphen disjunkt sind.
Im folgenden sei G ein Multigraph. Die Ordnung von G ist $|G| := |V^G|$, die Größe $\|G\| := |E^G|$. Die Multigraphen der Ordnung ≤ 1 und Größe 0 bezeichnen wir als trivial.

Ist $e = xy \in E^G$ ein Kante, so sind x, y die Endpunkte von e, und e verbindet x und y. Wir sagen auch, x und y sind inzident zu e. Zwei Ecken sind adjazent, wenn sie durch eine Kante verbunden sind. Für ein $v \subseteq V^G$ sei $N^G(v)$ die Menge aller zu v adjazenten Ecken, und für ein $U \subseteq V^G$ sei
$N^G(U) := \bigcup_{v \in U} N^G(v) \setminus U$.
Der Grad einer Ecke $v \in V^G$, den wir mit $d^G(v)$ bezeichnen, ist die Zahl der zu v inzidenten Kanten. Eine Ecke vom Grad 0 bezeichnen wir als isoliert. Der Maximalgrad von G ist die Zahl

$$\Delta(G) := \max\{d^G(v) \mid v \in V^G\}.$$

Der Durchschnittsgrad ist die Zahl

$$d(G) := \frac{\sum_{v \in V^G} d^G(v)}{|V^G|}.$$

Beachte, daß $d(G) = \frac{2\|G\|}{|G|}$. Der Minimalgrad schließlich ist die Zahl

$$\delta(G) := \min\{d^G(v) \mid v \in V^G\}.$$

Ist G klar aus dem Kontext erkennbar, so lassen wir das hochgestellte ^{G}, beispielsweise in V^G oder $d^G(v)$, oft weg.

Teilgraphen

Sei G ein Multigraph. Ein Teilgraph von G ist ein Multigraph H mit $V^H \subseteq V^G$ und $E^H \subseteq E^G$. Wir schreiben $H \subseteq G$. H ist induzierter Teilgraph von G, wenn $H \subseteq G$ und $E^H := E^G \cap \mathcal{P}_2(V^H)$. Ist $U \subseteq V^G$, so bezeichnet $\langle U \rangle^G$ den induzierten Teilgraphen von G mit Eckenmenge U. Weiterhin sei $G \setminus U := \langle V^G \setminus U \rangle^G$. Für ein $v \in V^G$ schreiben wir $G \setminus v$ anstatt $G \setminus \{v\}$.
Für ein $F \subseteq \mathcal{P}_2(V^G)$ sei $G + F := (V^G, E^G \cup F)$ und $G - F := (V^G, E^G \setminus F)$. Für ein $e \in E^G$ schreiben wir $G + e$ bzw. $G - e$ anstatt $G + \{e\}$ bzw. $G - \{e\}$.
Für Multigraphen G, H setzen wir $G \cup H := (V^G \cup V^H, E^G \cup E^H)$, $G \cap H := (V^G \cap V^H, E^G \cap E^H)$ und $G \setminus H := G \setminus V^H$.

Wege und Kreise

Sei G ein Multigraph. Ein <u>Kantenzug</u> (der Länge $n-1$ von v_1 nach v_n) in G ist eine Folge

$$Z = v_1 e_1 v_2 e_2 \cdots e_{n-1} v_n$$

für ein $n \geq 1$, wobei $v_1, \ldots, v_n \in V^G$ und, für $1 \leq i < n$, $e_i = v_i v_{i+1} \in E^G$. Wir setzen $V^Z := \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $E^Z := \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$. Ein <u>Weg</u> in G ist ein Kantenzug, in dem keine Ecke mehrfach vorkommt. Oft identifizieren wir, etwas ungenau, einen Weg W mit dem Teilgraphen (V^W, E^W).
Ein Kantenzug ist <u>geschlossen</u>, wenn sein Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen. Ein <u>Kreis</u> ist ein geschlossener Kantenzug, bei dem außer dem Anfangs- und Endpunkt keine Ecken mehrfach vorkommen. Wiederum identifizieren wir einen Kreis K oft mit dem Teilgraphen (V^K, E^K).
Zwei Kantenzüge

$$Z = v_1 e_1 v_2 e_2 \cdots e_{n-1} v_n, \quad Z' = v_1' e_1' v_2' e_2' \cdots e_{n-1}' v_n'$$

sind <u>disjunkt</u>, wenn $V^Z \cap V^{Z'} = \emptyset$. Sie haben <u>disjunktes Inneres</u>, wenn $V^Z \cap V^{Z'} \subseteq \{v_1, v_n\}$ und $E^Z \cap E^{Z'} = \emptyset$.

<u>Zusammenhang</u>

Eine <u>Zerlegung</u> eines Graphen G ist ein Paar (H, K) von Teilgraphen mit $H \cup K = G$ und $V^H \setminus V^K \neq \emptyset$, $V^K \setminus V^H \neq \emptyset$. Die <u>Ordnung</u> der Zerlegung (H, K) ist $|V^H \cap V^K|$. Ein <u>Trenner</u> von G ist eine Teilmenge $T \subseteq V^G$, für die es eine Zerlegung (H, K) von G mit $V^H \cap V^K = T$ gibt. Die <u>Ordnung</u> von T ist $|T|$.
G ist <u>(1-)zusammenhängend</u>, wenn es keine Zerlegung der Ordung 0 von G gibt. G ist bekanntlich genau dann zusammenhängend, wenn es für alle $v, w \in V^G$ einen Weg von v nach w gibt. Für $k \geq 2$ ist G <u>k-zusammenhängend</u>, wenn $|G| > k$ und wenn G keinen Trenner der Ordnung kleiner als k besitzt. Der <u>Zusammenhang</u> von G ist die Zahl

$$\kappa(G) := \max\{k \mid G \ \text{k-zusammenhängend}\}.$$

<u>(0.1) Satz von Menger.</u> Sei G ein nicht-trivialer Graph und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist G genau dann k-zusammenhängend, wenn es für alle $v, w \in V^G$ mit $v \neq w$ mindestens k Wege von v nach w mit paarweise disjunktem Inneren gibt.

Das impliziert insbesondere, daß in einem 2-zusammenhängenden Graphen jede Ecke auf einem Kreis liegt.
Wir verwenden folgende Variante des Satzes von Menger:

(0.2) Lemma. Sei $k \geq 1$ und G ein Graph. Seien $X, Y \subseteq V^G$ mit $|X|, |Y| \geq k$, so daß jede Zerlegung (H, K) von G mit $X \subseteq V^H$ und $Y \subseteq V^K$ mindestens Ordnung k hat.

Dann gibt es in G eine Familie von k paarweise disjunkten Wegen von X nach Y.

Eine Eckenmenge $U \subseteq V^G$ heißt zusammenhängend (in G), wenn der Teilgraph $\langle U \rangle^G$ zusammenhängend ist. Eine Zusammenhangskomponente von G ist eine maximale zusammenhängende Eckenmenge.

Bäume und Wälder

Ein Wald ist ein kreisfreier Graph; ein Baum ein zusammenhängender Wald. Ecken vom Grad höchstens 1 in einem Wald bezeichnen wir als Blätter.
Sei T ein Baum und seien $t, u \in T$. Dann gibt es genau einen Weg von t nach u in T. Dessen Eckenmenge bezeichnen wir mit tTu. (Den Weg selbst können wir also mit $\langle tTu \rangle^T$ bezeichnen.)

Spezielle Graphen

Ein Graph G ist vollständig, wenn $E^G = \mathcal{P}_2(V^G)$. Für jede Menge X setzen wir $K_X := (X, \mathcal{P}_2(X))$. Eine Clique in einem Graphen G ist ein $X \subseteq V^G$, so daß $\langle X \rangle^G = K_X$. Die Cliquenzahl von G ist

$$\omega(G) := \max\big\{|X| \;\big|\; X \text{ Clique in } G\big\}.$$

Für $n \geq 1$ setzen wir

$$K_n := K_{\{1,\dots,n\}}.$$

Ein Graph G ist bipartit, wenn es eine Partition von V^G in Mengen X, Y gibt, so daß $E^G \subseteq \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$. Ist $E^G = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$, so bezeichnen wir G als vollständigen bipartiten Graphen.

Für $m, n \geq 1$ setzen wir

$$K_{m,n} := \big(\{1, \dots, m+n\}, \{ij \mid 1 \leq i \leq m, m+1 \leq j \leq m+n\}\big).$$

Für $n \geq 1$ sei

$$W_n := \big(\{1, \dots, n\}, \{ij \mid |i-j| = 1\}\big).$$

Für $n \geq 3$ sei

$$C_n := \big(\{1, \dots, n\}, \{ij \mid 1 \leq i \leq n, i-j \equiv 1 \pmod{n}\}\big).$$

Für $m, n \geq 1$ bezeichnen wir folgenden Graphen als das $(m \times n)$-Gitter:

$$\begin{aligned} G_{m,n} := \Big(&\big\{1, \dots, m\big\} \times \big\{1, \dots, n\big\}, \\ &\big\{(i_1, i_2)(j_1, j_2) \;\big|\; (i_1 = j_1 \wedge |j_2 - i_2| = 1) \\ &\qquad\qquad \vee (|j_1 - i_1| = 1 \wedge i_2 = j_2)\big\}\Big) \end{aligned}$$

<u>Der Satz von Ramsey</u>

<u>(0.3) Satz von Ramsey.</u> Seien $k, l \in \mathbb{N}$ und $F : \mathcal{P}_k(\mathbb{N}) \to \{1, \dots, l\}$. Dann gibt es eine unendliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$, so daß F auf $\mathcal{P}_k(M)$ konstant ist.

I. Einführung

Die Minorentheorie ist eine Strukturtheorie für Klassen Graphen mit „verbotenen Minoren". Die Theorie hat enge Verbindungen zur topologischen Graphentheorie, in der man Einbettungen von Graphen in verschiedene topologische Räume untersucht. Diese Vorlesung soll in die Minorentheorie einführen.
Im ersten Kapitel führen wir zunächst Minoren und von Graphen und einige topologische Grundlagen ein. Anschließend soll die Theorie anhand einiger Fragestellungen motiviert werden. Im letzten Paragraphen wollen wir einen Satz von Wagner beweisen, der eine Verbindung zwischen der chromatischen Zahl eines Graphen und seinen Minoren herstellt.

§1. Minoren

Für einen Graphen G und eine Kante $e = vw \in E^G$ sei G/e der Graph, der aus G durch Kontraktion der Kante e entsteht.
Formal können wir G als den Graphen

$$\Big(\big(V^G \setminus \{v,w\}\big) \cup \{e\}, \big(E^G \setminus \{xy \mid \{x,y\} \cap \{v,w\} \neq \emptyset\}\big) \cup \big\{\{x,e\} \bigm| xv \in E^G \vee xw \in E^G\big\}\Big)$$

definieren (vgl. Abb. 1).

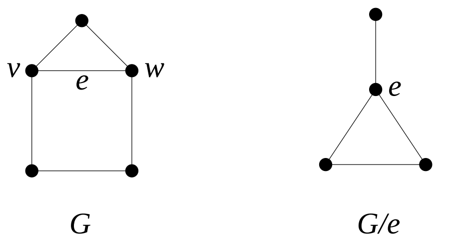

Abbildung 1: Kontraktion einer Kante e

(1.1) Definition. Seien G, H Graphen. H ist Minor von G (wir schreiben $H \preceq G$), wenn es eine Folge $G_1, \dots, G_n$ von Graphen gibt, für die gilt:

- $G_1 \subseteq G$, $G_n \cong H$,
- Für $1 \leq i < n$ gibt es ein $e \in E^{G_i}$, so daß $G_{i+1} = G_i/e$.

(1.2) Lemma. Seien G, H Graphen. Dann sind äquivalent:

(1) $H \preceq G$.

(2) Es gibt eine Folge $G_1, \dots, G_n$ von Graphen gibt, für die gilt:

- $G_1 = G$, $G_n \cong H$,
- Für $1 \leq i < n$ gibt entweder eine Kante $e \in E^{G_i}$, so daß $G_{i+1} = G_i/e$ oder $G_{i+1} = G_i - e$, oder eine isolierten Ecke $v \in V^{G_i}$, so daß $G_{i+1} = G_i \setminus v$.

(3) Es gibt eine Abbildung h, die jeder Ecke $v \in V^H$ einen zusammehängenden Teilgraphen $h(v) \subseteq G$ zuordnet und jeder Kante $e \in E^G$ eine Kante $h(e) \in E^G$, so daß gilt:

- für $v \neq w \in V^H$ gilt $V^{h(v)} \cap V^{h(w)} = \emptyset$,
- ist $e = vw \in E^H$, so liegt jeweils ein Endpunkt von $h(e)$ in $h(v)$ bzw. $h(w)$.

Ein h wie in (3) nennen wir eine Minoreneinbettung von H in G; wir schreiben $h : H \preceq G$. Wir können eine Minoreneinbettung $h : H \preceq G$ immer so wählen, daß für alle $v \in V^G$ der Graph $h(v)$ ein Baum mit höchstens $d^G(v)$ Blättern ist.
Sei $H \subseteq G$ mit Zusammenhangskomponenten $K_1, \dots, K_m$. Dann ist G/H der Minor von G mit Eckenmenge

$$\{K_1, \dots, K_m\} \cup (V^G \setminus V^H)$$

und Eckenmenge

$$E^{G/H} \cup \{vK_i \mid v \in V^G, 1 \leq i \leq m, \exists w \in V^{K_i} : vw \in E^G\}$$
$$\cup \{K_iK_j \mid v \in V^G, 1 \leq i \neq j \leq m, \exists v \in V^{K_i}, w \in V^{K_j} : vw \in E^G\}.$$

Für eine Teilmenge $U \subseteq V^G$ sei $G/U := G/\langle U \rangle^G$.

(1.3) Korollar. $\preceq$ ist eine partielle Ordnung auf der Klasse aller Graphen (modulo Isomorphie).

(1.4) Definition. Sei H ein Graph.

(1) Ein Graph G ist H-frei, wenn $H \not\preceq G$.
(2) Eine Klasse $\mathcal{C}$ von Graphen ist H-frei, wenn dies für alle $G \in \mathcal{C}$ der Fall ist.
(3) $\mathcal{C}$ ist $\preceq$-nichttrivial, wenn es ein H gibt, so daß $\mathcal{C}$ H-frei ist.

(1.5) Beispiel. Ein Graph ist genau dann K_3-frei, wenn er ein Wald ist.

(1.6) Lemma. Eine Klasse $\mathcal{C}$ von Graphen ist genau dann $\preceq$-nichttrivial, wenn es ein $n \geq 1$ gibt, so daß $\mathcal{C}$ K_n-frei ist.

(1.7) Lemma. Ein Klasse von Graphen ist genau dann unter Minorenbildung abgeschlossen, wenn es eine abzählbare Klasse $\mathcal{V}$ von Graphen gibt, so daß für alle G gilt:

$$G \in \mathcal{C} \iff \forall H \in \mathcal{V}: H \not\preceq G.$$

Beweis: „$\Longrightarrow$": Alle $H \notin \mathcal{C}$ bilden eine solche Klasse. Die Behauptung folgt, weil es bis auf Isomorphie nur abzählbar viele endliche Graphen gibt.
„$\Longleftarrow$": Klar. □

(Die analoge Aussage gilt natürlich für alle partiellen Ordnungen auf abzählbaren Mengen.)

§2. Topologische Grundbegriffe

Graphen lassen sich auf natürliche Weise als topologische Räume auffassen (als CW-Komplexe). Sind zwei Graphen G, H homöomorph, so schreiben wir $G \cong_t H$. Ist H homöomorph zu einem Teilgraphen von G, so schreiben wir $H \subseteq_t G$.

Ein Graph G ist eine Unterteilung eines Graphen H, wenn man G aus H dadurch erhalten kann, daß man alle Ecken von H durch Wege der Länge ≥ 1 ersetzt. Umgekehrt erhält man H aus G durch Kontraktion von Kanten, die zu einer Ecke vom Grad 2 inzident sind.
Dann ist $G \cong_t H$ genau dann, wenn es ein K gibt, so daß sowohl G als auch H Unterteilungen von K sind.
Also

$$H \subseteq_t G \implies \exists H' \cong_t H : \; H' \preceq G.$$

Eine Abbildung Π eines Graphen G in einen topologischen Raum X ist genau dann eine Einbettung, wenn

- für $v \neq w \in V$ gilt $\Pi(v) \neq \Pi(w)$,
- für $e \in E$ ist $\Pi(e)$ eine einfache Kurve in X (d.h. homöomorphes Bild von $[0,1]$), und für $e \neq f \in E^G$ schneiden sich die Kurven $\Pi(e)$ und $\Pi(f)$ höchstens in ihren Endpunkten,
- für $v \in V$ und $e \in E$ ist $\Pi(v)$ genau dann Endpunkt von $\Pi(e)$, wenn v inzident zu e ist.

Wir betrachten in dieser Vorlesung nur Einbettungen von Graphen in Flächen (d.h. kompakte zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeiten) oder in den $\mathbb{R}^n$, für ein $n \geq 2$. Diese Räume sind triangulierbar. Wir nennen eine Einbettung eines Graphen G in einen topologischen Raum X stückweise linear, wenn es eine Triangulierung des Raumes gibt, so daß das Bild des Graphen auf dem 1-Gerüst dieser Triangulierung liegt. Es läßt sich zeigen, daß ein Graph G genau dann in einen triangulierbaren Raum einbettbar ist, wenn er stückweise linear einbettbar ist (vgl. Bollobas 1979, S.16).

(2.1) Lemma. Ist ein Graph G in eine Fläche S einbettbar, so auch alle seine Minoren.

Beweis: Siehe Abb. 2. $\square$

Abbildung 2:

(2.2) Beispiele. (1) Für jede Fläche S gibt es ein n, so daß die Klasse aller in S (als topologische Räume) einbettbaren Graphen K_n-frei ist (Beweis mit Eulerformel, vgl. Kapitel 2 und 6).

(2) Die Klasse aller verschlingungsfrei in den $\mathbb{R}^3$ einbettbaren Graphen ist K_6-frei.

Die Klasse aller knotenfrei in den $\mathbb{R}^3$ einbettbaren Graphen ist K_7-frei.

(Conway und Gordon 1983)

Es ist leicht zu sehen, daß auch die Klasse der verschlingungskreien Graphen und die Klasse der knotenfreien Graphen abgeschlossen unter Minorenbildung sind.

§3. Minorentheorie

Die Minorentheorie ist eine Strukturtheorie für $\preceq$-nichttriviale Klassen von Graphen. Das vielleicht wichtigste Ergebnis, das aus dieser Theorie folgt, ist folgender Satz von Robertson und Seymour, der eine alte Vermutung von Wagner beweist.

(3.1) Minorensatz. Für jede unter Minorenbildung abgeschlossene Klasse $\mathcal{C}$ von Graphen gibt es eine endliche Klasse $\mathcal{V}$ gibt, so daß für alle G gilt:

$$G \in \mathcal{C} \iff \forall H \in \mathcal{V}:\ H \not\preceq G.$$

Etwas prägnanter sagen wir: „Jede unter Minorenbildung abgeschlossene Klasse von Graphen ist durch endlich viele verbotene Minoren charakterisiert."

Die Theorie ist (unter anderem) motiviert durch folgende Betrachtungen:

(1) Die Klasse aller Graphen ist zu reichhaltig („universell"), um eine sinnvolle Strukturtheorie zu erlauben. $\preceq$-nichttriviale Klassen hingegen erlauben eine solche Theorie, sind aber immer noch reichhaltig genug, um viele interessante Beispiele zu umfassen.

(2) Der Satz von Kuratowski besagt, daß ein Graph genau dann planar (d.h. in den $\mathbb{R}^2$ einbettbar) ist, wenn weder K_5 noch $K_{3,3}$ homöomorph zu einem Teilgraphen von G sind. Wagner hat gezeigt, daß dies genau dann der Fall ist, wenn weder K_5 noch $K_{3,3}$ Minoren von G sind.

Der Minorensatz impliziert nun, daß es für jede Fläche S eine entsprechende Charakterisierung aller in S einbettbaren Graphen durch endlich viele verbotene Minoren gibt. Daraus folgt leicht, daß sich die in S einbettbaren Graphen auch durch endlich viele „verbotene topologische Teilgraphen" charakterisieren lassen.

Es ist eines der Hauptziele der Vorlesung, diese Verallgemeinerung des Satzes von Kuratowski zu beweisen.

(3) Eine weitere Motivation, K_n-freie Graphen zu studieren, kommt aus der Färbungstheorie. Ein <u>k-Färbung</u> eines Graphen G ist eine Abbildung $f : V^G \to \{1, \ldots, k\}$, so daß $f(v) \neq f(w)$ für alle $v, w \in V^G$. Die <u>chromatische Zahl</u> $\chi(G)$ von G ist das minimale k, so daß G k-färbbar ist.

Die Verbindung zur Minorentheorie wird durch folgende, noch immer offene Vermutung von Hadwiger hergestellt:

<u>(3.2) Hadwigers Vermutung.</u> Sei $k \geq 1$ und G ein Graph. Dann gilt

$$\chi(G) \geq k \implies K_k \preceq G.$$

Offenbar gilt dies für $k = 3$. Unter Verwendung des Vierfarbensatzes haben Robertson, Seymour und Thomas Hadwigers Vermutung für $k \leq 6$ bewiesen. Ein Abschwächung der Vermutung wollen wir im nächsten Paragraphen beweisen.

(4) Die Minorentheorie hat zahlreiche algorithmische Anwendungen. Beispielsweise haben Robertson und Seymour bewiesen, daß für jedes $k \geq 1$ folgendes Problem in Polynomialzeit lösbar ist (und damit eine weitere, lange Zeit offene Frage beantwortet):

<u>Eingabe:</u>	Ein Graph G und paarweise verschiedene Ecken $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k \in V^G$.
<u>Problem:</u>	Entscheide, ob es paarweise disjunkte Pfade P_i, für $1 \leq i \leq k$, von x_i nach y_i gibt.

Ganz grob verfahren sie wie folgt: Entweder, der Eingabegraph enthält sehr große (in Abhängigkeit von k) vollständige Graphen als Minoren, und zwar in der Nähe der Ecken $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$. Dann gibt es die geforderten Pfade. Oder dies ist nicht der Fall. Dann ist die Struktur von G in der Nähe der Eingabeecken einfach, und das Problem läßt sich unter Verwendung dieser Struktur lösen.

§4. Durchschnittsgrad, Färbungszahl und K_n-Minoren

<u>(4.1) Lemma.</u> Sei $k \geq 1$. Für jeden (nichtleeren) Graphen G mit Durchschnittsgrad $d(G) \geq 2^{k-2}$ gilt $K_k \preceq G$.

<u>Beweis:</u> Wir beweisen die Behauptung induktiv über k. Für $k \leq 2$ ist sie trivial.
Für $k \geq 3$ nehmen wir OBdA an, daß G zusammenhängend ist. Wir wählen ein maximales $U \subseteq G$, so daß

(i) $\langle U \rangle^G$ ist zusammenhängend,

(ii) $d(G/U) \geq 2^{k-2}$.

Beachte, daß jedes einelementige U diese Bedingungen erfüllt, und daß andererseits $U \neq V^G$. Da G zusammenhängend ist, gilt $N(U) \neq \emptyset$.
Sei $H := \langle N(U) \rangle$. Dann gilt

$$d^H(v) \geq 2^{k-3} \text{ für alle } v \in V^H. \qquad (*)$$

Denn nehmen wir an, $v \in V^H$ ist eine Ecke mit $d^H(v) < 2^{k-3}$. Ich behaupte, daß $U \cup \{v\}$ dann ebenfalls (i) und (ii) erfüllt. (i) ist klar. Um (ii) zu sehen, wählen wir $e = uv \in E^G$ mit $u \in U$. Dann hat $(G/U)/e$ eine Ecke und $d^H(v) + 1$ Kanten weniger als G/U. Wegen $k \geq 3$ gilt $d^H(v) + 1 \leq 2^{k-2}$. Damit

$$\begin{aligned} d\big((G/U)/e\big) &\geq \frac{2(\|G/U\| - 2^{k-3})}{|G/U| - 1} \\ &= \frac{2\|G/U\| - 2^{k-2}}{|G/U| - 1} \\ &= \frac{d(G/U)|G/U| - 2^{k-2}}{|G/U| - 1} \\ &\geq 2^{k-2} \end{aligned}$$

Das beweist $(*)$. Also ist $d(H) \geq 2^{k-3}$, und nach Induktionsvoraussetzung hat H einen K_{k-1}-Minor. Damit hat G einen K_k-Minor. □

(4.2) Bemerkung. Die Aussage des Lemmas läßt sich noch wesentlich verschärfen: Mader hat 1968 gezeigt, daß jeder Graph mit Durchschnittsgrad mindestens $ck\log(k))$ (für eine geeignete Konstante $c > 0$) einen K_k-Minor besitzt. 1984 hat Kostochka gezeigt, daß sogar jeder Graph mit Durchschnittsgrad mindestens $ck\sqrt{\log(k)}$ (für ein $c > 0$) einen K_k-Minor besitzt.

Bollobas und Thomason und unabhängig davon Komlos und Szemeredi haben 1994 bewiesen, daß jeder Graph mit Durchschnittsgrad mindestens ck^2 (für ein $c > 0$) einen zu K_k homöomorphen Teilgraphen besitzt.

(4.3) Lemma. Seien $k \geq 1$ und G ein Graph, so daß $d(H) < k$ für alle induzierten Teilgraphen H von G. Dann ist $\chi(G) \leq k$.

Beweis: Induktion über $n := |G|$: Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Für $n > 1$ wählen wir $v \in V^G$ mit $d^G(v) < k$ und setzen $H := G \setminus v$. Nach Induktionsvoraussetzung ist H k-färbbar, jede k-Färbung von H läßt sich auf G fortsetzen, indem man v eine Farbe gibt, die keiner seiner höchstens $(k-1)$ Nachbarn hat. □

<u>(4.4) Korollar (Wagner 1964).</u> Sei $k \geq 1$ und G ein Graph. Dann gilt

$$\chi(G) > 2^{k-2} \implies K_k \preceq G.$$

II. Planare Graphen

In diesem Kapitel beweisen wir den Satz von Kuratowski, der die planaren Graphen durch verbotene topologische Subgraphen charakterisiert, und geben eine ähnlich Charakterisierung für außerplanare Graphen.

§5. Der Satz von Kuratowski

(5.1) Definition. Ein Graph ist planar, wenn er sich in die Ebene $\mathbb{R}^2$ einbetten läßt. Eine Einbettung eines Graphen G in die Ebene nennen wir eine Karte.

(5.2) Satz von Kuratowski (1930). Ein Graph G ist genau dann planar, wenn $K_5 \not\subseteq_t G$ und $K_{3,3} \not\subseteq_t G$.

(5.3) Satz (Wagner 1937). Ein Graph G ist genau dann planar, wenn $K_5 \not\preceq G$ und $K_{3,3} \not\preceq G$.

Satz (5.3) folgt sofort aus dem Satz von Kuratowski und Korollar (5.6).

(5.4) Lemma. Seien G, H Graphen, und gelte $\Delta(H) \leq 3$. Dann gilt

$$H \subseteq_t G \iff H \preceq G.$$

Beweis: Klar. $\square$

(5.5) Lemma. Für alle Graphen G gilt:

$$K_5 \preceq G \implies \big(K_5 \subseteq_t G \vee K_{3,3} \subseteq_t G\big).$$

Beweis: Sei G ein Graph mit $K_5 \not\subseteq_t G$ und $K_5 \preceq G$. Dann gibt es in G eine Konfiguration wie in Abbildung 3 (denn sonst wäre $K_5 \subseteq_t G$). Das bedeutet aber, daß $K_{3,3} \subseteq_t G$. $\square$

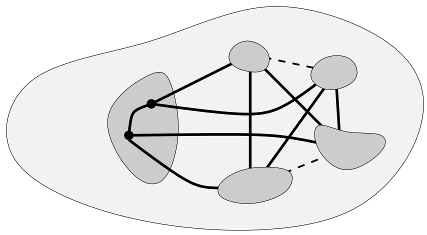

Abbildung 3:

Zusammen ergeben die Lemmata für alle Graphen G:

(5.6) Korollar. Für alle Graphen G gilt:

$$\big(K_5 \preceq G \vee K_{3,3} \preceq G\big) \iff \big(K_5 \subseteq_t G \vee K_{3,3} \subseteq_t G\big).$$

Die folgenden drei Paragraphen sind einem Beweis des Satzes von Kuratowski gewidmet.

§6. Topologische Voraussetzungen

(6.1) Jordanscher Kurvensatz. Sei $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ eine einfache geschlossene Kurve. Dann hat $\mathbb{R}^2$ genau zwei Zusammenhangskomponenten, deren Rand jeweils γ selbst ist.

Eine Beweis findet man in [33].
Der Jordansche Kurvensatz impliziert folgendes Lemma.

(6.2) Lemma. Seien π_1, π_2, π_3 drei einfache Kurven in $\mathbb{R}^2$, deren Inneres disjunkt ist und deren Endpunkte übereinstimmen. Dann hat $\mathbb{R}^2$ genau drei Zusammenhangskomponenten, deren Ränder $\pi_1 \cup \pi_2$, $\pi_1 \cup \pi_3$ und $\pi_2 \cup \pi_3$ sind.

(6.3) Definition. Sei Π eine Einbettung eines Graphen in einen zusammenhängenden topologischen Raum X. Ein Gebiet von Π ist eine Zusammenhangskomponente von $X \setminus \Pi(G)$.

Die Menge aller Gebiete von Π bezeichnen wir mit F^{Π}.

Ist Π eine Einbettung eines Graphen G in eine Fläche S und X ein Gebiet von Π, so ist der Rand ∂X von X das Bild $\Pi(H)$ eines Teilgraphen von G. Wir bezeichnen H als den Rand von X in G. Einen Teilgraphen von G, der Rand eines Gebietes von Π in G ist, nennen wir Π-Rand.
Eine Sehne eines Kreises C in einem Graphen G ist eine Kante in $E^G \setminus E^C$, deren Endpunkte beide in C liegen.

(6.4) Lemma. Sei Π eine Karte eines 2-zusammenhängenden Graphen. Dann ist jeder Π-Rand ein Kreis.

Beweis: Sei X ein Gebiet von Π und $H \subseteq G$ sein Rand. Falls H ein Baum ist, so gilt $H = G$ (da G zusammenhängend), was aber nicht sein kann (da G 2-zusammenhängend).
Sei $C \subseteq H$ ein Kreis. Angenommen, es gilt $H \neq C$. Falls H eine Sehne xy von C enthält, so gibt es in H drei im inneren disjunkte Pfade von x nach y. Die können wg. Lemma (6.2) aber nicht alle im Rand von X liegen.
Ansonsten enthält H eine Kante vw mit $v \in V^C$ und $w \notin V^C$. Da G 2-zusammenhängend ist, gibt es einen Pfad P von w zu einer Ecke $x \in V^C \setminus \{v\}$, dessen Inneres von C disjunkt ist. Wir haben damit 3 im Inneren disjunkte Pfade von v nach x, die jeweils mindestens ein Kante aus H enthalten. Das widerspricht wiederum Lemma (6.2). $\square$

(6.5) Eulerformel. Sei Π eine Karte eines zusammenhängenden

Graphen G. Dann gilt

$$|G| - ||G|| + |F^\Pi| = 2.$$

(ohne Beweis)
Folgendes Lemma impliziert die „Hinrichtung von Kuratowski":

(6.6) Lemma. Weder K_5 noch $K_{3,3}$ sind planar.

Beweis: Angenommen, Π ist eine Karte des K_5. Nach der Eulerformel gilt

$$|F^\Pi| = 10 - 5 + 2 = 7$$

Da K_5 2-zusammenhängend ist, ist jeder Π-Rand ein Kreis, und damit ist jede Kante im Rand von genau zwei Gebieten enthalten Für $i \geq 1$ sei f_i die Zahl der Gebiete von Π, deren Rand i Kanten enthält. Dann gilt

$$20 = 2|E^G| = \sum_{i \geq 3} i f_i \geq 3 \sum_{i \geq 3} f_i = 3|F^\Pi| = 21,$$

ein Widerspruch.
Als nächstes nehmen wir an, Π ist eine Karte des $K_{3,3}$. Nach der Eulerformel gilt

$$|F^\Pi| = 9 - 6 + 2 = 5.$$

Alle Kreise in $K_{3,3}$ haben Länge mindestens 4. Definieren wir f_i wie oben, so erhalten wir

$$18 = 2|E^G| = \sum_{i \geq 4} f_i \geq 4|F^\Pi| = 20,$$

einen Widerspruch. $\square$

§7. Beweis des Satzes von Kuratowski

(7.1) Lemma. Seien G, H Graphen mit $|G \cap H| \leq 1$. Dann ist $G \cup H$ genau dann planar, wenn G und H planar sind.

Beweis: Offensichtlich. □

(7.2) Lemma. Seien G, H zusammenhängende Graphen mit $|G \cap H| = 2$, und seien $x \neq y \in V^G \cap V^H$. Dann ist $G \cup H$ genau dann planar, wenn $G + xy$ und $H + xy$ planar sind.

Beweis: „$\Longrightarrow$": Folgt aus der Tatsache, daß es sowohl in G als auch in H eine Weg von x nach y gibt.

„$\Longleftarrow$": Wir können G und H so in die Ebene einbetten, daß die Kante xy jeweils im äußeren Gebiet liegt. Diese Karten lassen sich dann an der Kante xy zusammenkleben. □

(7.3) Lemma. Sei G ein 3-zusammenhängender Graph mit $|G| \geq 5$. Dann gibt es eine Kante $e \in E^G$, so daß G/e 3-zusammenhängend ist.

Beweis: Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gilt:

Für jede Kante $e = uv \in E^G$ existiert ein $w \in V^G$, so daß $\{u, v, w\}$ den Graphen G trennt. $(*)$

Denn für alle $e = uv \in E^G$ besitzt G/e einen Trenner $\{w, x\}$. Eine der Ecken w, x, sagen wir x, muß durch das Zusammenziehen von e neu entstanden sein. Also trennt $\{u, v, w\}$ den Graphen G.
Weil G 3-zusammenhängend ist, gilt ferner

Für jeden Trenner $\{u, v, w\}$ von G hat jede der Ecken u, v, w in jeder Komponente von $G \setminus \{u, v, w\}$ einen Nachbarn. $(**)$

Wählen wir nun eine Kante $e = uv \in E^G$, gemäß $(*)$ eine Ecke w, so daß $\{u, v, w\}$ den Graphen G trennt, und eine Komponente H von $G \setminus \{u, v, w\}$ so, daß $|H|$ minimal ist (unter allen möglichen Wahlen von e, w, H). Sei x ein Nachbar von w in H (existiert wg. $(**)$). Dann existiert wegen $(*)$ ein $y \in V^G$, so daß $\{w, x, y\}$ den Graphen G trennt.

Sei K eine Komponente von $G \setminus \{w, x, y\}$ mit $V^K \cap \{u, v\} = \emptyset$. Eine solche Komponente gibt es, weil $uv \in E^G$. Wegen $(**)$ besitzt x einen Nachbarn z in K. Da $N^G(x) \subseteq V^H \cup \{u, v, w\}$, gilt $z \in V^H$ und damit $K \subset H$. Das widerspricht der Minimalität von H. □

<u>Beweis der Rückrichtung des Satzes von Kuratowski:</u> Wegen Korollar (5.6) reicht es zu zeigen, daß jeder Graph G mit $K_5 \not\preceq G$ und $K_{3,3} \not\preceq G$ planar ist.
Angenommen, die Behauptung ist falsch. Sei G ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung. Wegen Lemma (7.1) und Lemma (7.1) ist G 3-zusammenhängend. Da K_4 planar ist, ist $|G| \geq 5$.
Sei $e = vw \in E^G$, so daß G/e 3-zusammenhängend ist; eine solche Kante existiert nach Lemma (7.3). Da $|G/e| < |G|$, ist G/e planar. Sei Π eine Karte von G/e. Sei $H := (G/e) \setminus e$ der Graph, der aus G/e durch Löschen der neuen Ecke e entsteht. H ist 2-zusammenhängend, also sind alle Ränder der Einschränkung von Π auf H Kreise. Sei X das Gebiet von H, das $\Pi(e)$ enthält und C der Rand von X in H. Dann gilt $N^G(v) \cup N^G(w) \subseteq V^C$. Beachte ferner, daß sowohl v als auch w mindestens 2 Nachbarn auf C haben.
Die Karte Π induziert eine Karte von $G \setminus w$ (vgl. Abb. 4(a)). Daß diese Karte nicht auf G erweiterbar ist, kann zwei Ursachen haben: Entweder, zwei Nachbarn von w liegen in verschiedenen Abschnitten (vgl. Abb. 4(b)), dann hat G einen $K_{3,3}$-Minor. Oder w hat drei Nachbarn (vgl. Abb. 4(c)), die auch Nachbarn von v sind. Dann hat G einen K_5-Minor.

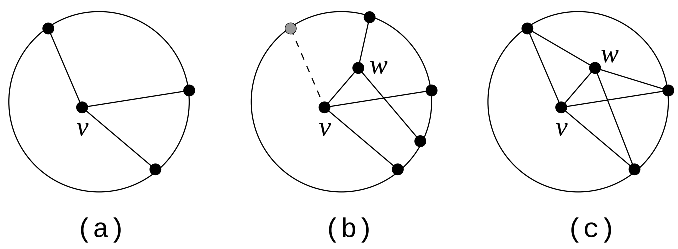

Abbildung 4:

Beides widerspricht unserer Annahme. Also ist die Karte auf G erweiterbar, was aber der Annahme widerspricht, daß G nicht planar ist. □

§8. Außerplanare Graphen

(8.1) Definition. Ein Graph G ist außerplanar, wenn er eine Karte Π besitzt, für die ein Π-Rand H mit $V^G = V^H$ existiert.

Außerplanare Graphen sind also planare Graphen, die sich so in die Ebene einbetten lassen, daß alle Ecken auf dem Rand eines, OBdA des äußeren, Gebietes liegen (vgl. Abb. 5).

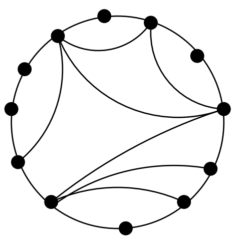

Abbildung 5: Ein außerplanarer Graph

Für eine Graphen G und ein $x \notin V^G$ bezeichne $G \cdot x$ den Graphen

$$\left(V^G \cup \{x\}, E^G \cup \{vx \mid v \in V^G\}\right).$$

(8.2) Lemma. Sei G ein Graph und $x \notin V^G$. Dann ist G genau dann außerplanar, wenn $G \cdot x$ planar ist.

Beweis: „$\Longrightarrow$": Offensichtlich.
„$\Longleftarrow$": Sei Π eine Karte $G \cdot x$ und Π' die Einschränkung von Π auf G. Dann liegen alle Ecken von G auf dem Π'-Rand des Gebietes, das $\Pi(x)$ enthält. $\square$

(8.3) Korollar. Sei G ein Graph. Dann sind äquivalent:

(1) G ist außerplanar.

(2) $K_4 \not\subseteq_t G$ and $K_{2,3} \not\subseteq_t G$.

(3) $K_4 \not\leq G$ and $K_{2,3} \not\leq G$.

III. Baumzerlegungen

Wir führen die zentralen Begriffe Baumzerlegung und Baumweite ein und beweisen einige grundlegende Sätze über Graphen beschränkter Baumweite.

§9. Baumzerlegungen

(9.1) Definition. Eine Baumzerlegung eines Graphen G ist ein Paar $(T, (B_t)_{t \in V^T})$, bestehend aus einem Baum T und einer Familie $(B_t)_{t \in V^t}$ von Teilmengen von V^G, das folgende Bedingungen erfüllt:

(1) $\bigcup_{t \in T} \langle B_t \rangle^G = G$.

(2) Für alle $v \in V^G$ ist $\{t \in V^t \mid v \in B_t\}$ zusammenhängend in T.

Ist $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine Baumzerlegung von G, so bezeichnen wir die Mengen B_t als die Blöcke von $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ und die Mengen $B_{tu} := B_u \cap B_t$, für $tu \in E^T$, als die Schnitte von $(T, (B_t)_{t \in V^T})$. Um die Ecken bzw. Kanten von T und die von G auseinanderzuhalten, bezeichnen wir erstere gewöhnlich als Knoten und Baumkanten. Um die Schreibweise zu vereinfachen, setzen wir für $v \in V^G$

$$B^{-1}(v) := \{t \in V^T \mid v \in B_t\}.$$

(9.2) Beispiel. Abb. 7 zeigt drei verschiedene Baumzerlegungen des Graphen aus Abb. 6.

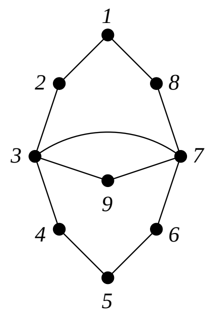

Abbildung 6:

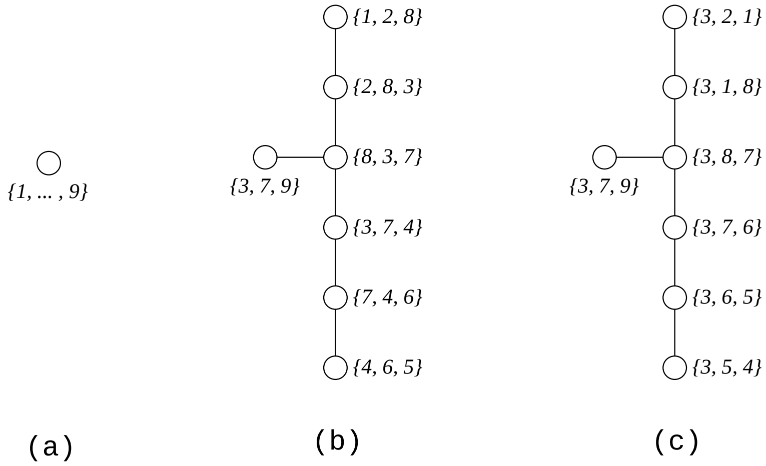

Abbildung 7:

Man beachte, daß für jeden Graphen G $\left(K_1, (V^G)\right)$ eine Baumzerlegung ist.

(9.3) Lemma. Sei $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine Baumzerlegung eines Graphen G. Ist H ein zusammenhängender Teilgraph von G, so ist die Knotenmenge

$$B^{-1}(H) := \{t \in V^T \mid B_t \cap V^H = \emptyset\}$$

zusammenhängend in T.

Beweis: Beachte, daß $B^{-1}(H) := \bigcup_{v \in V^H} B^{-1}(v)$. Die Behauptung folgt aus den Tatsachen, daß $B^{-1}(v) \cap B^{-1}(w) \neq \emptyset$ für $vw \in E^G$

(wg. Def. (9.1)(1)) und daß $B^{-1}(v)$ zusammenhängend für alle $v \in V^H$ (wg. Def. (9.1)(2)). $\square$

<u>(9.4) Definition.</u> Eine <u>Baumzerlegung</u> $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ heißt <u>klein</u>, wenn $B_t \not\subseteq B_u$ für $t \neq u \in V^T$.

<u>(9.5) Lemma.</u> Sei $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine Baumzerlegung eines Graphen G. Dann gibt es eine kleine Baumzerlegung $(T', (B'_t)_{t \in V^{T'}})$, so daß ein $h : T' \preceq T$ existiert mit:

(1) Für alle $t' \in V^{T'}$ und $t \in h(t')$ gilt $B_t \subseteq B_{t'}$.

(2) Für alle $t' \in V^{T'}$ existiert ein $t \in h(t')$ mit $B'_{t'} = B_t$.

<u>Beweis:</u> Gilt $B_u \subseteq B_t$ für $u, t \in V^T$, so auch $B_u \subseteq B_s$ für den Nachbarn s von u auf dem Weg von u nach t in T. Wir können also die Kante us in T kontrahieren und erhalten eine kleinere Baumzerlegung, die (1) und (2) erfüllt. Wir wiederholen dies so lange, bis wir eine kleine Baumzerlegung erhalten. $\square$

<u>(9.6) Lemma.</u> Sei $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine kleine Baumzerlegung eines Graphen G.

(1) Jeder Schnitt von $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ ist ein Trenner von G.
Genauer sei $e = tu \in E^T$ und seien T_1, T_2 die Zusammenhangskomponenten von $T - e$. Dann trennt B_{tu} die Eckenmengen $V_1 := \bigcup_{s \in T_1} B_s$ und $V_2 := \bigcup_{s \in V^{T_2}} B_s$.

(2) Jeder Block B_t, für den t kein Blatt von T ist, ist ein Trenner von G.
Genauer seien $T_1, \ldots, T_m$ die Zusammenhangskomponenten von $T \setminus t$. Dann trennt B_t die Eckenmengen $V_1 := \bigcup_{s \in T_1} B_s, \ldots, V_m := \bigcup_{s \in T_m} B_s$.

<u>Beweis:</u> (1) Wg. Def. 9.1(1) gilt $\langle V_1 \rangle^G \cup \langle V_2 \rangle^G = G$, und wegen Def. 9.1(2) ist $V_1 \cap V_2 = B_{tu}$. Weil die Baumzerlegung klein ist, folgt schließlich $V_1 \setminus V_2 \neq \emptyset$ und $V_2 \setminus V_1 \neq \emptyset$.

(2) beweist man analog. $\square$

(9.7) Korollar. Sei $(T,(B_t)_{t\in V^T})$ eine Baumzerlegung eines Graphen G und X eine Clique in G. Dann existiert ein $t \in T$ mit $X \subseteq B_t$.

§10. Baumweite

(10.1) Definition. (1) Die Weite einer Baumzerlegung $(T,(B_t)_{t\in V^T})$ ist die Zahl

$$w(T,(B_t)_{t\in V^T}) := \max\{|B_t| \mid t \in V^T\} - 1.$$

(2) Die Baumweite eines Graphen G ist die Zahl

$$bw(G) := \min\{w(T,(B_t)_{t\in V^T}) \mid (T,(B_t)_{t\in V^T}) \text{ Baumzerlegung von } G\}.$$

Man beachte, daß nach Lemma (9.5) jeder Graph G eine kleine Baumzerlegung der Weite $bw(G)$ besitzt.

(10.2) Lemma. Seien G, H Graphen mit $H \preceq G$. Dann gilt $bw(H) \leq bw(G)$.

Beweis: Sei $(T,(B_t)_{t\in V^T})$ eine Baumzerlegung von G und $h : H \preceq G$. Für $t \in T$ setzen wir $B'_t := \{v \in V^H \mid V^{h(v)} \cap B_t \neq \emptyset\}$. Dann ist $(T,(B'_t)_{t\in V^T})$ eine Baumzerlegung von H mit

$$w(T,(B'_t)_{t\in V^T}) \leq w(T,(B_t)_{t\in V^T}).$$

$\square$

(10.3) Proposition. (1) Für alle $n \geq 1$ gilt $bw(K_n) = (n-1)$.

(2) Für alle $n \geq 1$ gilt $\mathrm{bw}(C_n) = 2$.

(3) Ein Graph G ist genau dann ein Wald, wenn $\mathrm{bw}(G) \leq 1$.

(4) Ein Graph G besteht genau dann aus lauter isolierten Ecken, wenn $\mathrm{bw}(G) = 0$.

Beweis: (1) folgt aus Korollar (9.7).
(2) $\mathrm{bw}(C_n) \geq \mathrm{bw}(K_3) \geq 2$ folgt aus Lemma (10.2) und (1). Für $1 \leq i \leq n-2$ sei $B_i := \{1, i+1, i+2\}$. Dann ist $(W_{n-2}, (B_i)_{1 \leq i \leq n})$ eine Baumzerlegung von C_n (zur Erinnerung: W_m bezeichnet den Weg der Länge m).
(3) Wir beweisen die Hinrichtung induktiv über die Ordnung. Der Induktionsanfang ist trivial. Für den Induktionsschritt sei G ein Wald der Ordnung > 1 und v ein Blatt von G. Sei $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine Baumzerlegung von $G \setminus \{v\}$ der Weite höchstens 1. Sei w der Nachbar von v, wenn es einen gibt, sonst sei $w \in V^G$ beliebig. Sei $t \in V^T$, so daß $w \in B_t$. Sei T' der Baum, der aus T durch Anfügen eines neuen Blattes t' an t entsteht, und sei $B_{t'} := \{v, w\}$. Dann ist $(T', (B_t)_{t \in V^{T'}})$ eine Baumzerlegung von G der Weite 1.
Die Rückrichtung folt aus (2) und Lemma (10.2). □

(10.4) Proposition. Für $n \geq m \geq 1$ gilt

$$\mathrm{bw}(G_{m,n}) \leq m.$$

Beweis: Wir erinnern uns, daß W_k den Weg der Länge k bezeichnet und daß $V^{G_{m,n}} = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$.
Für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ setzen wir $x_{(j-1)n+i} := (i, j)$. Für $1 \leq k \leq m(n-1)$ sei $B_k := \{x_k, \ldots, x_{k+m}\}$. Dann ist

$$\left(W_{m(n-1)}, (B_k)_{1 \leq k \leq m(n-1)}\right)$$

eine Baumzerlegung der Weite m von $G_{m,n}$. □

§11. Räuber und Gendarmen

Wir führen in diesem Paragraphen das Räuber und Gendarmen Spiel auf einem Graphen G ein.
Geben wir zunächst eine informelle Beschreibung: Sei $k \geq 1$ und G ein Graph.

> Es spielt ein Räuber gegen k Gendarmen, die alle auf dem Graphen G leben. Zu Beginn des Spiels wählen zunächst die Gendarmen k Ecken von G als ihre Anfangspositionen. Dann wählt der Räuber eine Ecke von G als seine Anfangsposition.
>
> Eine Runde des Spiels sieht wie folgt aus: Sagen wir, die Gendarmen stehen auf den Ecken $x_1, \dots, x_k$ und der Räuber auf der Ecke y. Dann besteigen einige der Gendarmen, sagen wir die auf $x_l, \dots, x_k$ stehenden, Hubschrauber (sie werden also zeitweilig vom Graphen entfernt) und fliegen zu neuen Ecken $x'_l, \dots, x'_k$. Noch bevor die Hubschrauber landen, sieht der Räuber, wo sie landen wollen und kann zu einer neuen Ecke y' laufen. Er läuft beliebig schnell, aber nur entlang eines Weges im Graphen G, der keine der Ecken $x_1, \dots, x_{l-1}$ enthält. Jetzt landen die Hubschrauber, die Gendarmen stehen also auf $x_1, \dots, x_{l-1}, x'_l, \dots, x'_k$ und der Räuber auf y'. Falls $y' \notin \{x_1, \dots, x_{l-1}, x'_l, \dots, x'_k\}$, wird eine weitere Runde gespielt.
>
> Die Gendarmen gewinnen das Spiel, wenn sie nach endlich vielen Runden den Räuber fangen, d.h. wenn eine Position mit Gendarmen auf $x_1, \dots, x_k$ und dem Räuber auf y erreicht wird, bei der $y \in \{x_1, \dots x_k\}$.

Hier ist eine formale Definition des Spiels:

(11.1) Definition. Sei $k \geq 1$ und G ein Graph. Das Spiel $\mathrm{RG}(G,k)$ wird von zwei Spielern R und GE gespielt. Eine Position des Spiels ist ein Paar (X, y), wobei $X \in \mathcal{P}_{\leq k}(V^G)$ und $y \in V^G$.

Zu Beginn des Spiels wählt GE ein $X \in \mathcal{P}_{\leq k}(V^G)$. R antwortet, indem er ein $y \in V^G$ wählt.

In jeder Runde des Spiels, sagen wir in Position (X, y), wählt GE ein $X' \in \mathcal{P}_{\leq k}$. R antwortet, indem er ein $y' \in V^G$ wählt, für das es einen Weg von y nach y' gibt, der $X \cap X'$ nicht schneidet.

Das Spiel hört auf, wenn eine Position (X, y) mit $y \in X$ erreicht wird, in diesem Fall gewinnt GE. Tritt dieser Fall niemals ein, so gewinnt R.

Eine Partie des Spiels RG(G, k)ist eine Folge $(X_i, y_i)_{i \geq 1}$, so daß für alle $i \geq 1$ entweder ein Weg von y_i nach y_{i+1} in $G \setminus (X_i \cap X_{i+1})$ existiert oder $y_i \in X_i$ und $(X_i, y_i) = (X_{i+1}, y_{i+1})$ gilt. Tritt letzterer Fall für ein $i \geq 1$ ein, so sagen wir, daß GE die Partie gewinnt.
Eine Strategie für GE im Spiel RG(G, k) ist eine Abbildung $S : \{\emptyset\} \cup (\mathcal{P}_{\leq k}(V^G) \times V^G) \to \mathcal{P}_{\leq k}(V^G)$. Für eine Strategie S für GE ist eine S-Partie eine Partie $(X_i, y_i)_{i \geq 1}$ mit $X_0 = S(\emptyset)$ und $X_{i+1} = S(X_i, y_i)$ für alle $i \geq 1$. S ist eine Gewinnstrategie für GE, wenn GE jede S-Partie gewinnt.
Strategien und Gewinnstrategien für R lassen sich ähnlich definieren.

(11.2) Definition. Die Gendarmenweite eine Graphen G ist die Zahl

$$\text{gw}(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{GE hat eine Gewinnstrategie in RG}(G, k)\}.$$

(11.3) Proposition. (1) Für Wälder G gilt $\text{gw}(G) = 2$.

(2) Für alle $n \geq 1$ gilt $\text{gw}(C_n) = 3$.

(3) Für alle $n \geq 1$ gilt $\text{gw}(K_n) = n$.

(4) Für alle $n \geq m \geq 1$ gilt $\text{gw}(G_{m,n}) = m + 1$.

Beweis: Die einzige nichttriviale Aussage ist die untere Schranke in (3). Um diese zu beweisen, beschreiben wir eine Gewinnstrategie R für R in RG$(G_{m,n}, m)$.
Eine Zeile i, $1 \leq i \leq m$ von $G_{m,n}$ ist fast leer bezüglich einer Teilmenge $X \subseteq V := \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$, wenn $X \cap \{i\} \times \{1, \ldots, n\} \subseteq \{(i, 1)\}$. Entsprechend definieren wir eine fast leere Spalte. Man beachte, daß es für alle $X \in \mathcal{P}_{\leq m}(V)$ eine fast leere Spalte oder eine fast leere Zeile gibt. Für $X \in \mathcal{P}_{\leq m-1}(V)$ gibt es sogar eine ganz leere Zeile und eine ganz leere Spalte.
R spielt so, daß immer folgende Invariante bewahrt bleibt:

Für jede Position (X, y), die in einer R-Partie auftreten kann, liegt y in einer bezgl. X fast leeren Zeile oder Spalte. (*)

Nehmen wir an, (X, y) erfüllt $(*)$. Sagen wir, y liegt in der fast leeren Spalte j. Sei $X' \in \mathcal{P}_{\leq m}(V) \setminus \{X\}$. Dann gibt es bezüglich $X \cap X'$ eine leere Zeile und eine leere Spalte, diese schneiden sowohl j als auch die fast leere Spalte bzw. Zeile, die es bezgl. X' gibt. Also gibt es in $G \setminus (X \cap X')$ einen Weg von y in diese fast leere Spalte bzw. Zeile. $\square$

(11.4) Lemma. Für alle G gilt

$$\mathrm{gw}(G) \leq \mathrm{bw}(G) + 1.$$

Beweis: Sei $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine kleine Baumzerlegung der Weite k von G.
Wir geben eine Gewinnstrategie S für GE im Spiel $\mathrm{RG}(G, k+1)$ an: Sei $r \in V^T$ beliebig. Wir setzen $S(\emptyset) = B_r$. Man beachte, daß es für alle $t \in T$ und $y \in V^G \setminus B_t$ die Knotenmenge $B^{-1}(y)$ ganz in einer Zusammenhangskomponente $Z(t, y)$ von $T \setminus t$ enthalten ist. Ferner gibt es genau ein $u(t, y) \in N^T(t) \cap Z(t, y)$. Für $t \in T$, $y \in V^G \setminus B_t$ setzen wir $S(B_t, y) := B_{u(t,y)}$ Für alle anderen $X \in \mathcal{P}_{\leq k+1}(V^G)$, $y \in V^G$ setzen wir $S(X, y) := X$.
Es läßt sich leicht induktiv zeigen, daß für jede S-Partie $(X_i, y_i)_{i \geq 1}$ gilt:

- Für alle $i \geq 1$ gibt es ein $t_i \in V^T$, so daß $X_i = B_{t_i}$.
- Für alle $i \geq 1$ gilt entweder $y_i \in X_i$ oder $Z(t_i, y_i) \supset Z(t_{i+1}, y_{i+1})$.

Daraus folgt sofort, daß S eine Gewinnstrategie ist. $\square$

§12. Brambel

(12.1) Definition. Sei G ein Graph.

(1) Zwei Teilmengen $B, C \subseteq V^G$ berühren einander, wenn $B \cap C \neq \emptyset$ oder wenn $v \in B, w \in C$ existieren mit $vw \in E^G$.
(2) Ein Brambel von G ist eine Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(V^G)$ von zusammenhängenden Eckenmengen von G, die einander paarweise berühren.
(3) Eine Überdeckung eines Brambels $\mathcal{B}$ ist eine Teilmenge $X \subseteq V^G$ mit $B \cap X \neq \emptyset$ für alle $B \in \mathcal{B}$.
(4) Die Weite eines Brambels $\mathcal{B}$ ist die Zahl

$$\mathrm{w}(\mathcal{B}) := \min\left\{|X| \;\middle|\; X \text{ Überdeckung von } \mathcal{B}\right\}.$$

(5) Die Brambelweite von G ist die Zahl

$$\mathrm{brw}(G) := \max\left\{\mathrm{w}(\mathcal{B}) \;\middle|\; \mathcal{B} \text{ Brambel von } G\right\}.$$

(12.2) Beispiel. Die folgenden Mengen bilden einen Brambel des Gitters $G_{n,n}$ der Weite $(n+1)$:

$$\begin{array}{l} \left\{(1,j) \;\middle|\; 1 \leq j \leq n\right\}, \\ \left\{(i,1) \;\middle|\; 2 \leq i \leq n\right\}, \\ \left\{(k,j) \;\middle|\; 2 \leq j \leq n\right\} \cup \left\{(i,l) \;\middle|\; 2 \leq i \leq n\right\} \qquad \text{für } 2 \leq k,l \leq n. \end{array}$$

(12.3) Bemerkung. Für alle Graphen G und $k \geq 1$ gilt:

$$K_k \preceq G \iff G \text{ besitzt einen Brambel } \mathcal{B} \text{ mit } |\mathcal{B}| = \mathrm{w}(\mathcal{B}) = k.$$

(12.4) Lemma. Für alle Graphen G gilt:

$$\mathrm{brw}(G) \leq \mathrm{gw}(G).$$

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ ein Brambel von G der Ordnung $(k+1)$. Dann gewinnt der Räuber das Spiel $\mathrm{RG}(G,k)$, indem er sich immer in einem Element des Brambels aufhält. Also gilt $\mathrm{gw}(G) \geq (k+1)$. □

Nimmt man die Beweise der Lemmata (11.4) und (12.4) zusammen, so erhält man sofort:

(12.5) Korollar. Sei $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine Baumzerlegung eines Graphen G und $\mathcal{B}$ ein Brambel von G. Dann gibt es einen Knoten $t \in T$, so daß B_t den Brambel $\mathcal{B}$ überdeckt.

(12.6) Lemma. Seien $\mathcal{B}$ ein Brambel eines Graphen G und X, Y Überdeckungen von $\mathcal{B}$. Dann gibt eine Familie von $w(\mathcal{B})$ paarweise disjunkten Wegen von X nach Y.

Beweis: Folgt aus Lemma (0.2), denn jedes Z, das X von Y trennt, ist ebenfalls eine Überdeckung von $\mathcal{B}$. □

(12.7) Satz. Für alle Graphen G gilt:

$$\mathrm{bw}(G) + 1 = \mathrm{gw}(G) = \mathrm{brw}(G).$$

Beweis: Wir müssen nur noch zeigen, daß $\mathrm{bw}(G) + 1 \leq \mathrm{brw}(G)$. Sei G ein Graph der Brambelweite $k+1$. Wir zeigen, daß G eine Baumzerlegung der Weite höchstens k besitzt.
Eine Baumzerlegung $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ von G oder einem Teilgraphen von G nennen wir $\mathcal{B}$-gut, für einen Brambel $\mathcal{B}$, wenn kein Block B_t mit $|B_t| > (k+1)$ den Brambel $\mathcal{B}$ überdeckt.
Wir zeigen:

Für jeden Brambel $\mathcal{B}$ von G gibt es eine $\mathcal{B}$-gute Baumzerlegung von G. (*)

Für $\mathcal{B} = \emptyset$ ergibt das die Behauptung.
Angenommen, $(*)$ ist falsch. Sei $\mathcal{B}$ ein Brambel maximaler Größe, für den $(*)$ nicht gilt. Sei X eine minimale Überdeckung von $\mathcal{B}$ und $l := |X| = w(\mathcal{B}) \leq k+1$. Wir zeigen, daß für jede Komponente Y von $G \setminus X$ der Teilgraph $\langle X \cup Y \rangle^G$ eine $\mathcal{B}$-gute Baumzerlegung mit X als Block besitzt. Die Baumzerlegungen der einzelnen Komponenten lassen sich dann am Block X zu einer $\mathcal{B}$-guten Baumzerlegung von G zusammenkleben. Das widerspricht unserer Annahme, daß $(*)$ für $\mathcal{B}$ nicht gilt.
Sei also Y eine Komponente von $G \setminus X$. Wir zeigen:

$\langle X \cup Y \rangle^G$ besitzt eine $\mathcal{B}$-gute Baumzerlegung, in der X als Block vorkommt. (**)

Falls Y ein $B \in \mathcal{B}$ nicht berührt, so ist $(W_2, (X, Y \cup N(Y)))$ eine $\mathcal{B}$-gute Baumzerlegung von $\langle X \cup Y \rangle^G$.
Nehmen wir also an, Y berührt alle $B \in \mathcal{B}$, dann ist $\mathcal{B}' := \mathcal{B} \cup \{Y\}$ ein Brambel. Wegen der Minimalität von $\mathcal{B}$ erfüllt $\mathcal{B}'$ $(*)$. Sei

$(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine $\mathcal{B}'$-gute Baumzerlegung von G. Diese Baumzerlegung ist nicht $\mathcal{B}$-gut, also gibt es ein $s \in T$, so daß $|B_s| > (k+1)$ und daß $|B_s|$ $\mathcal{B}$ überdeckt. Dann gilt $B_s \cap Y = \emptyset$. Nach Lemma (12.6) gibt es paarweise disjunkte Wege $W_1, \ldots, W_l$ von X nach B_s. Für $1 \leq i \leq l$ sei x_i der Anfangspunkt von W_i. Dann gilt $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Weil $B_s \cap Y = \emptyset$ gilt $W_i \cap Y = \emptyset$ für $1 \leq i \leq l$. Für $1 \leq i \leq l$ wählen wir ein $t_i \in V^T$, so daß $x_i \in B_{t_i}$. Wir erinnern uns, daß sTt_i die Knotenmenge des Weges von s nach t_i in T bezeichnet.
Für $t \in V^T$ setzen wir

$$C_t := (B_t \cap (X \cup Y)) \cup \{x_i \mid t \in sTt_i\}$$

Ich behaupte, daß $(T, (C_t)_{t \in V^T})$ eine $\mathcal{B}$-gute Baumzerlegung von $\langle X \cup Y \rangle^G$ ist, die X als Block enthält. Das zeigt (∗∗). Zum Beweis der Behauptung stellen wir folgende Überlegungen an:

- $\bigcup_{t \in V^T} \langle B_t \rangle^G = G$ impliziert $\bigcup_{t \in V^T} \langle C_t \rangle^G = \langle X \cup Y \rangle^G$.
- Sei $v \in V^H$. Dann ist entweder $v \in Y$ und $C^{-1}(v) = B^{-1}(v)$ ist zusammenhängend, oder es gibt ein i, $1 \leq i \leq l$, so daß $v = x_i$. Dann gilt $C^{-1}(x_i) = B^{-1}(x_i) \cup sTt_i$. Diese Menge ist zusammenhängend, da $t_i \in B^{-1}(x_i)$.
- Da $B_s \cap Y = \emptyset$ gilt $B_s = X$.
- Für alle $t \in T$ gilt $|C_t| \leq |B_t|$. Denn falls $x_i \in C_t \setminus B_t$, so gilt $t \in sTt_i$. Da aber $B^{-1}(V^{W_i})$ zusammenhängend ist und s, t_i enthält, so gilt gibt es mindestens ein $w \in W_i \cap (B_t \setminus C_t)$.
- Sei nun $t \in V^T$ mit $|C_t| > (k+1)$. Dann gilt $C_t \cap Y \neq \emptyset$, da $|C_t| > |X|$. Da $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ $\mathcal{B}'$-gut ist und $|B_t| \geq |C_t|$, existiert ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \cap B_t = \emptyset$. Angenommen, $B \cap C_t \neq \emptyset$. Dann gibt es ein i mit $x_i \in B \cap C_t$. Es folgt $B \cap B_{t_i} \neq \emptyset$. Weil B_s den Brambel $\mathcal{B}$ überdeckt, gilt auch $B_s \cap B \neq \emptyset$. Da B und damit auch $B^{-1}(B)$ zusammenhängend sind, folgt $B \cap B_t \neq \emptyset$, ein Widerspruch.

□

§13. Baumzerlegungen über Klassen von Graphen

<u>(13.1) Definition.</u> Sei $(T,(B_t)_{t\in V^T})$ eine Baumzerlegung eines Graphen G.

(1) Die <u>Adhäsion</u> von $(T,(B_t)_{t\in V^T})$ ist die Zahl $\mathrm{ad}(T,(B_t)_{t\in V^T}) := \max\{|B_{tu}| \mid tu \in E^T\}$.

(2) Sei $t \in V^T$. Der <u>Torso</u> von $(T,(B_t)_{t\in V^T})$ an der Stelle t ist der Teilgraph

$$[B_t] := \langle B_t\rangle^G + \{vw \mid \exists u \in V^T:\ v,w \in B_t \cap B_u\}.$$

(3) $(T,(B_t)_{t\in V^T})$ ist eine Baumzerlegung <u>über</u> einer Klasse $\mathcal{C}$ von Graphen, wenn $[B_t] \in \mathcal{C}$ für alle $t \in V^T$.

Man beachte, daß ein Graph genau dann Baumweite höchstens k hat, wenn er eine Baumzerlegung über der Klasse aller Graphen der Ordnung höchstens $(k+1)$ besitzt.
Für $k \in \mathbb{N}$ seien

$$\mathcal{Z}_k := \{G \mid G \text{ k-zusammenhängend}\},$$
$$\mathcal{Z}_k^* := \{K_1, \dots, K_k\} \cup \mathcal{Z}_k.$$

<u>(13.2) Beispiel.</u> Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und G ein Graph. Dann besitzt G eine Baumzerlegung der Adhäsion höchstens k über $\mathcal{Z}_{k+1}^*$.

Diese Beispiel ist insofern ziemlich nutzlos, als daß nicht die Blöcke der Baumzerlegung k-zusammenhängend sind, sondern nur die Torsi, die aber im allgemeinen nichts mit dem zerlegten Graphen zu tun haben. Nur für $k \leq 2$ sind bessere Ergebnisse bekannt: Da bei Baumzerlegungen der Adhäsion 1 Torsi und Blöcke übereinstimmen, besitzt jeder Graph eine Baumzerlegung über $\mathcal{Z}_2^*$, deren Torsi Teilgraphen des Graphen sind. Lemma (15.1) zeigt, daß jeder Graph eine Baumzerlegung über $\mathcal{Z}_3^*$ besitzt, deren Torsi homöomorph zu Teilgraphen des Graphen sind.

Man beachte, daß wegen Lemma (9.5) jeder Graph, der eine Baumzerlegung der Adhäsion höchstens k über einer Klasse $\mathcal{C}$ besitzt, auch eine kleine Baumzerlegung der Adhäsion höchstens k über $\mathcal{C}$ besitzt.

(13.3) Lemma. Seien G, H Graphen mit $H \preceq G$, $k \geq 0$ und $\mathcal{C}$ eine Klasse von Graphen, die unter Minorenbildung abgeschlossen ist, so daß G eine Baumzerlegung der Adhäsion k über $\mathcal{C}$ besitzt. Dann besitzt H eine Baumzerlegung der Adhäsion höchstens k über $\mathcal{C}$.

Beweis: Wie Lemma (10.2). □

(13.4) Proposition. Sei $n \geq 1$ und $\mathcal{C}$ eine Klasse von K_n-freien Graphen, die abgeschlossen ist unter Minorenbildung. Dann hat jeder Graph, der eine Baumzerlegung über $\mathcal{C}$ hat, auch eine Baumzerlegung über $\mathcal{C}$ Adhäsion höchstens $n-2$.

Beweis: Sei G ein Graph, der eine Baumzerlegung über $\mathcal{C}$ besitzt. Angenommen, ein G besitzt keine Baumzerlegung der Adhäsion höchstens $n-2$ über $\mathcal{C}$.
Sei $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ ist eine kleine Baumzerlegung eines Graphen G über $\mathcal{C}$ der Adhäsion $n-1$. Wir können annehmen, daß $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ so gewählt ist, daß die Anzahl von Kanten $tu \in E^T$ mit $|B_{tu}| = n-1$ minimal ist.
Sei $tu \in E^T$ mit $|B_{tu}| = n-1$ so gewählt, daß eine Zusammenhangskomponente T' von $T - tu$, sagen wir diejenige, die t enthält, keine weiteren Kanten $t'u' \in E^T$ mit $|B_{t'u'}| = n-1$ enthält. Sei $G' := \bigcup_{t' \in V^{T'}} \langle B_{t'} \rangle$. Weil $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ klein ist, ist $G' \setminus B_{tu} \neq \emptyset$. Seien $H_1, \ldots, H_m$ die Zusammenhangskomponenten von $G' \setminus B_{tu}$. Ferner sei $N_i := N^G(H_i) \subseteq B_{tu}$.
Für $1 \leq i \leq m$ ist $(T', (B_{t'} \cap (V^{H_i} \cup N_i))_{t' \in T'})$ eine Baumzerlegung von H_i über $\mathcal{C}$. Falls $N_i \subset B_{tu}$ für $1 \leq i \leq m$, so können wir diese Baumzerlegungen zu einer von G zusammenfügen, die der Minimalität von $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ in Bezug auf Kanten $tu \in E^T$ mit $|B_{tu}| = n-1$ widerspricht.
Nehmen wir andererseits an, es gibt ein $i, 1 \leq i \leq m$, so daß $N_i = B_{tu}$. Man beachte, daß $H_i \cap [B_t]$ zusammenhängend ist. Ziehen wir $H_i \cap [B_t]$ zu einer Ecke zusammen, so erhalten wir einen K_n-Minor in $[B_t] \in \mathcal{C}$ - Widerspruch. □

§14. Simpliziale Zerlegungen

(14.1) Definition. Sei G ein Graph.

(1) Ein Zerlegung (G_1, G_2) eines Graphen G ist simplizial, wenn $G_1 \cap G_2$ ein vollständiger Graph ist. In diesem Fall bezeichnen wir G auch als simpliziale Summe von G_1, G_2 und schreiben $G = G_1 \oplus G_2$.

(2) G ist simpliziale Summe einer Menge $\mathcal{F}$ von Teilgraphen (wir schreiben $G = \bigoplus \mathcal{F}$), wenn entweder $\mathcal{F} = \{G\}$, oder wenn es eine simpliziale Zerlegung (G_1, G_2) von G und Teilmengen $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ gibt, so daß $G_1 = \bigoplus \mathcal{F}_1$ und $G_2 = \bigoplus \mathcal{F}_2$.

Man beachte, daß aus $G = \bigoplus \mathcal{F}$ folgt, daß $G = \bigcup \mathcal{F}$. Deswegen gibt es für jede Menge $\mathcal{F}$ von Graphen höchstens ein G mit $G = \bigoplus \mathcal{F}$.

(14.2) Definition. Eine Baumzerlegung $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eines Graphen G ist simplizial, wenn alle ihre Schnitte Cliquen von G sind.

Aus Lemma (9.5) folgt, daß es zu jeder simplizialen Baumzerlegung $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eines Graphen G eine kleine simpliziale Baumzerlegung $(T', (B'_t)_{t \in V^{T'}})$ von G gibt, deren Blöcke alle auch Blöcke von $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ sind.

(14.3) Lemma. Sei G ein Graph und $\mathcal{F}$ eine Menge von Teilgraphen von G.

(1) Ist $G = \bigoplus \mathcal{F}$, so gibt es eine simpliziale Baumzerlegung $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ von G mit $\{\langle B_t \rangle^G \mid t \in V^T\} = \mathcal{F}$.

(2) Ist umgekehrt $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine kleine simpliziale Baumzerlegung von G, so gilt $G = \bigoplus \{\langle B_t \rangle \mid t \in V^T\}$.

Beweis: (1) Induktion über $|\mathcal{F}|$: Für $|\mathcal{F}|$ ist die Behauptung trivial.

Nehmen wir also an, daß $|\mathcal{F}| > 1$ und daß die Behauptung für kleinere Mengen bereits gezeigt ist. Seien $G_1, G_2 \subseteq G$ und $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$, so daß $G = G_1 \oplus G_2$, $G_1 = \bigoplus \mathcal{F}_1$ und $G_2 = \bigoplus \mathcal{F}_2$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für $i \in \{1, 2\}$ eine Baumzerlegung $(T^i, (B^i_t)_{t \in V^{T^i}})$ von G_i mit $\mathcal{F}_i = \{\langle B^i_t \rangle \mid t \in V^{T^i}\}$.
Sei $X = V^{G_1} \cap V^{G_2}$. Weil X ein Clique in G_1 und G_2 ist, gibt es ein $t^1 \in T^1$, so daß $X \subseteq B^1_{t^1}$, und ein $t^2 \in V^{T^2}$, so daß $X \subseteq B^2_{t^2}$.
OBdA können wir annehmen, daß $T^1 \cap T^2 = \emptyset$. Wir setzen $T := (T^1 \cup T^2) + t^1t^2$ und, für $t \in V^T$,

$$B_t := \begin{cases} B^1_t & \texttt{falls } t \in V^{T^1}, \\ B^2_t & \texttt{falls } t \in V^{T^2}. \end{cases}$$

Dann ist $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine Baumzerlegung von G mit den gewünschten Eigenschaften.

(2) Sei $tu \in E^T$ eine beliebige Kante von T und seien T^t, T^u beiden Komponenten von $T - tu$. Nach Lemma (9.6)(1) ist

$$\Big(\langle \bigcup_{s \in V^{T^t}} B_s \rangle, \langle \bigcup_{s \in V^{T^u}} B_s \rangle\Big)$$

eine Zerlegung von G. Weil $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine simpliziale Baumzerlegung ist, ist diese simplizial.
Jetzt können wir die beiden Teile der Zerlegung rekursiv weiter zerlegen. $\square$

<u>(14.4) Lemma.</u> Sei G ein Graph und seien $G_1, G_2, H \subseteq G$. Ist $G = G_1 \oplus G_2$ und $H \setminus G_1 \neq \emptyset$, $H \setminus G_2 \neq \emptyset$, so ist $H = (G_1 \cap H) \oplus (G_2 \cap H)$.

<u>Beweis:</u> Klar. $\square$

<u>(14.5) Satz.</u> Für jeden Graphen G gibt es eine eindeutig bestimmte Familie $\mathcal{S}_G$ von Teilgraphen mit folgenden Eigenschaften:

(1) $G = \bigoplus \mathcal{S}_G$.

(2) Kein $H \in \mathcal{S}_G$ besitzt eine simpliziale Zerlegung.

(3) Für $H, H' \in \mathcal{S}_G$ gilt $H \not\subset H'$.

Wir bezeichnen die Elemente von $\mathcal{S}_G$ als die simplizialen Summanden von G.

Beweis: Ein Menge $\mathcal{S}$ von teilgraphen von G, die (1) und (2) erfüllt, erhalten wir, indem wir den Graphen G und rekursiv die Summanden so lange es geht simplizial zerlegen.
Erfülle also $\mathcal{S}$ (1) und (2). Sei $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine gemäß Lemma (14.3)(1) gewählte simpliziale Baumzerlegung von G mit $\{\langle B_t \rangle^G \mid t \in V^T\} = \mathcal{S}$. Wir gehen gemäß Lemma 9.5 zu einer kleinen Baumzerlegung über, deren Blöcke erfüllen dann (1) - (3).
Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ und $(T', (B'_t)_{t \in V^{T'}})$ sind simpliziale Baumzerlegungen von G, deren Blöcke (1) - (3) erfüllen. Insbesondere sind diese Baumzerlegungen wegen (3) klein. Wegen Lemma (14.4) und weil jeder Schnitt von $(T', (B'_t)_{t \in V^{T'}})$ den Graphen G simplizial trennt, ist jeder Block B_t ganz in einem $B'_{t'}$ enthalten; die umgekehrte Aussage gilt natürlich auch. Aus (3) folgt dann die Eindeutigkeit. $\square$

(14.6) Korollar. Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von Graphen, die abgeschlossen ist unter Teilgraphenbildung. Dann hat ein Graph G genau dann eine Baumzerlegung über $\mathcal{C}$, wenn er Teilgraph eines Graphen G' ist, dessen simpliziale Summanden alle in $\mathcal{C}$ liegen.

G' kann dabei so gewählt werden, daß $V^G = V^{G'}$.

Beweis: „$\Longrightarrow$": Sei $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine kleine Baumzerlegung eines Graphen G über $\mathcal{C}$. Sei $G' := \bigcup_{t \in V^T} [B_t]$. Es ist leicht zu sehen, daß $G' = \bigoplus \{[B_t] \mid t \in V^T\}$, ist. Die simplizialen Summanden der Torsi $[B_t]$ sind als Teilgraphen von Graphen in $\mathcal{C}$ auch selbst in $\mathcal{C}$.

„$\Longleftarrow$": Folgt aus Lemma (14.3). $\square$

IV. K_4- und K_5-freie Graphen

In diesem Kapitel beschreiben wir die Struktur der K_4- und K_5-freien Graphen.

§15. K_4-freie Graphen

(15.1) Lemma. Jeder Graph G besitzt eine Baumzerlegung $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ der Adhäsion höchstens 2 über $\mathcal{Z}_3^*$ mit der Eigenschaft, daß jeder Torso von $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ homöomorph zu einem Teilgraphen von G ist.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung induktiv über $|G|$. Ist $G \in \mathcal{Z}_3^*$, so gilt sie.
OBdA sei G 2-zusammenhängend. Sei $\{x, y\}$ ein Trenner von G. Seien $H_1, \ldots, H_n$ die Zusammenhangskomponenten von $G \setminus \{x, y\}$ und, für $1 \leq i \leq n$,

$$\bar{H}_i := \langle V^{H_i} \cup \{x, y\} \rangle^G + xy.$$

Dann gilt $\bar{H}_i \subseteq_t G$, denn weil G 2-zusammenhängend ist, gibt es in jedem H_j einen Pfad von x nach y. Ferner gilt $|H_i| < |G|$. Also besitzen die $\bar{H}_i$ nach Induktionsvoraussetzung geeignete Baumzerlegungen, die sich an der Stelle x, y zusammenkleben lassen. □

(15.2) Satz. Ein Graph G ist genau dann K_4-frei, wenn $\mathrm{bw}(G) \leq 2$.

Beweis: Nach Lemma (7.3) besitzt jeder 3-zusammenhängende Graph einen K_4-Minor. Damit folgt der Satz aus Lemma (15.1). □

§16. K_5-freie Graphen

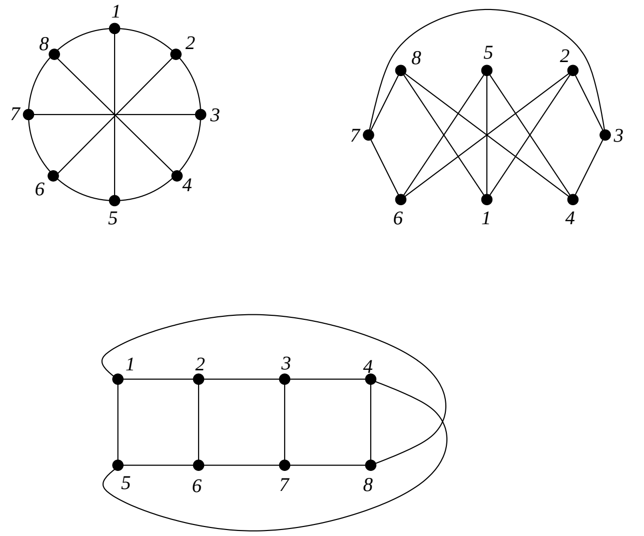

Abbildung 8: Dreimal der Graph L

(16.1) Lemma. Der Graph L aus Abbildung 8 ist kantenmaximal K_5-frei, d.h. $K_5 \not\preceq L$ und für alle $vw \in \mathcal{P}_2(V^L) \setminus E^L$ gilt $K_5 \preceq L + vw$.

Beweis: Um eine Ecke des Grades 4 zu erzeugen, muß man mindestens eine Kante in L zusammenziehen. Um also einen K_5 zu erhalten, müßte man mindestens fünf Kanten zusammenziehen. Danach blieben aber nur noch drei Ecken übrig. Also gilt $K_5 \not\preceq L$.
Abbildung 9 zeigt, daß $K_5 \preceq L + vw$ für alle $vw \in \mathcal{P}_2(V^L) \setminus E^L$. $\square$

(16.2) Satz (Wagner 1937). Ein Graph ist genau dann K_5-frei, wenn er eine Baumzerlegung über der Klasse

$$\mathcal{LP} := \{G \mid G \subseteq L\} \cup \{G \mid G \text{ planar}\}$$

besitzt.

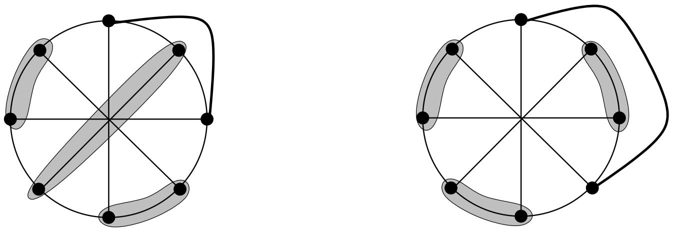

Abbildung 9:

Beweis: Die Rückrichtung folgt aus den Lemmata (16.1) und (16.3), die Hinrichtung aus Lemma (16.4). □

(16.3) Lemma. Sei (G_1, G_2) ein simpliziale Zerlegung eines Graphen G der Ordnung höchstens k. Sei $H = K_{k+1}$ oder H $(k+1)$-zusammenhängend. Dann gilt

$$H \preceq G \iff \big(H \preceq G_1 \vee H \preceq G_2\big).$$

Beweis: „$\Longrightarrow$": Sei $K := G_1 \cap G_2$ und $h : H \preceq G$. Es gibt mindestens ein $v \in V^H$ mit $h(v) \cap K = \emptyset$ und damit $h(v) \subseteq G_1 \setminus G_2$ oder $h(v) \subseteq G_1 \setminus G_2$. OBdA nehmen wir an, daß $v \in V^H$ mit $h(v) \in G_1 \setminus G_2$. Weil $H = K_{k+1}$ oder H $(k+1)$-zusammenhängend gilt dann $h(w) \cap G_1 \neq \emptyset$ für alle $w \in V^H$.
Wir setzen $h'(w) := h(w) \cap G_1$ für alle $w \in V^H$. Dann ist $h'(w)$ zusammenhängend, denn wenn W ein Weg von $x \in h(w)$ nach $y \in h(w)$ ist, dann liegt dieser Weg ganz in G_1 oder er enthält Ecken $z, z' \in V^K$. Weil K eine vollständig ist, gilt $z, z' \in E^K \subseteq E^G$, und man kann das Stück von W zwischen z und z' herausschneiden und durch die Kante zz' ersetzen. Auf diese Weise kann man einen Weg $W' \subseteq W \cap G_1 \subseteq h'(w)$ von x nach y finden.
Ähnlich kann man zeigen, daß es eine Kante zwischen $h'(w)$ und $h'(x)$ gibt, wenn es eine Kante zwischen $h(w)$ und $h(x)$ gibt.
Also gilt $h' : H \preceq G_1$.
„$\Longleftarrow$": trivial. □

(16.4) Lemma. Sei G ein kantenmaximaler K_5-freier Graph, der nicht simplizial zerlegbar ist. Dann ist G planar oder $G = L$.

Beweis: OBdA nehmen wir an, daß G nicht planar ist (und damit $|G| \geq 5$).

(1) Zunächst zeigen wir, daß G 3-zusammenhängend ist.
G ist 2-zusammenhängend, denn sonst gäbe es eine simpliziale Zerlegung von G. Angenommen, (G_1, G_2) ist eine Zerlegung von G der Ordnung 2, sagen wir mit $V^{G_1} \cup V^{G_2} = \{v, w\}$. Sowohl G_1 als auch G_2 sind zusammenhängend (da G 2-zusammenhängend), also sind $G_1 + vw$ und $G_2 + vw$ Minoren von G und damit K_5-frei. Nach Lemma (16.3) ist dann auch $G + vw$ K_5-frei. Weil G keine simpliziale Zerlegung besitzt, gilt $vw \notin E^G$. Das widerspricht der Maximalität von E^G.
Also ist G 3-zusammenhängend.

(2) Als nächstes zeigen wir, daß für jeden Trenner $X = \{x, y, z\}$ von G der Ordnung 3 gilt:

> $G \setminus X$ hat genau zwei Zusammenhangskomponenten, von denen eine Ordnung 1 hat. (∗)

Angenommen, (∗) ist falsch.
1. Fall: $G \setminus X$ hat genau drei Zusammenhangskomponenten der Ordnung 1, sagen wir, mit Ecken w_1, w_2, w_3. Weil G kantenmaximal K_5-frei ist gilt $K_5 \preceq G + \{xy, xz, yz\}$. Nach Lemma (16.3) gilt dann bereits $K_5 \subseteq \langle X \cup \{w_i\} \rangle^G + \{xy, xz, yz\}$ für ein $i, 1 \leq i \leq 3$. Widerspruch.
2. Fall: Es gibt eine Zerlegung (G_1, G_2) von G mit $V^{G_1} \cap V^{G_2} = X$ und $|G_1 \setminus G_2|, |G_2 \setminus G_1| \geq 2$. Sei $v \in V^{G_1} \setminus V^{G_2}$.
Weil G 3-zusammenhängend ist, gibt es drei Wege W_x, W_y, W_z von v nach x, y bzw. z, die nur die Ecke v gemeinsam haben.
Ich behaupte, daß es noch einen Weg W gibt, der zwei der Wege W_x, W_y, W_z miteinander verbindet und disjunkt zum dritten ist. Bis auf Symmetrie gibt es zwei Fälle: Entweder es gibt ein $w \in W_x \setminus \{x, v\}$. Weil G 3-zusammenhängend ist, gibt es in $G \setminus \{x, v\}$ einen Weg W_4 von $\{x\}$ nach $V^{W_y} \cup V^{W_z}$. Oder $V^{W_x} \cup V^{W_y} \cup V^{W_z} = \{v, x, y, z\}$. Weil $|G_1 \setminus G_2| \geq 2$ gibt es ein $w \in V^{G_1} \setminus \{v, x, y, z\}$. In $G \setminus \{v\}$ gibt es zwei Wege von $\{w\}$ nach X, die nur w gemeinsam haben. W sei die Vereinigung dieser

beiden Wege.
Damit sind wir in der Situation von Abbildung 10. Es folgt

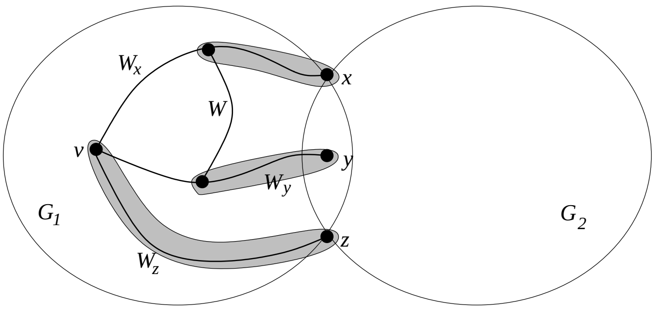

Abbildung 10:

$G_2 + \{xy, xz, yz\} \preceq G$ und, aus Symmetriegründen, $G_1 + \{xy, xz, yz\} \preceq G$. Also sind $G_2 + \{xy, xz, yz\}$ und $G_1 + \{xy, xz, yz\}$ K_5-frei. Nach Lemma (16.3) ist damit auch $G + \{xy, xz, yz\}$ K_5-frei. Weil G keine simpliziale Zerlegung besitzt, gilt $\{xy, xz, yz\} \not\subseteq E^G$. Das widerspricht der Maximalität von E^G. Also gilt $(*)$.

(3) Wir zeigen, daß G einen zu L homöomorphen Teilgraphen enthält. Weil G nicht planar ist, gibt es nach dem Satz von Kuratowski ein $H \subseteq G$ mit $H \cong_t K_{3,3}$. Seien $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in V^H$ die Ecken vom Grad 3 in H, so daß X, Y der Zweiteilung von $K_{3,3}$ entspricht. Wegen (2) sind zumindest zwei der drei Komponenten von $H \setminus X$ in $G \setminus X$ durch einen Weg W verbunden.
Falls W auch zwei der drei Komponenten von $H \setminus Y$ verbindet, so gilt $H \cup W \cong_t L$, und wir sind fertig.
Nehmen wir also an, das ist nicht der Fall und führen die Annahme zum Widerspruch. Wenn $(H \cup W) \setminus Y$ drei Zusammenhangskomponenten hat, dann gibt es wegen (2) einen Weg W', der zwei der drei Komponenten von $(H \cup W) \setminus Y$ miteinander verbindet. Ein Reihe von Fallunterscheidungen zeigen jetzt, daß $K_5 \preceq H \cup W \cup W'$ (vgl. Abb. 11). Widerspruch.

(4) Wir zeigen, daß $G = L'$. Angenommen, das ist nicht der Fall. Nehmen wir zunächst an, daß $E^G \setminus E^{L'} \neq \emptyset$. Eine Kante $e \in E^G \setminus E^{L'}$ kann nur parallel zu einem der Wege verlaufen, die die Kanten von L' bilden, denn sonst erhalten wir wegen Lemma 16.1 einen K_5-Minor. Ersetzen wir einen dieser Wege durch die Kante e, so erhalten wir ein $L'' \subseteq G$ mit $V^G \setminus V^{L''} \neq \emptyset$ und $L'' \cong_t L$.

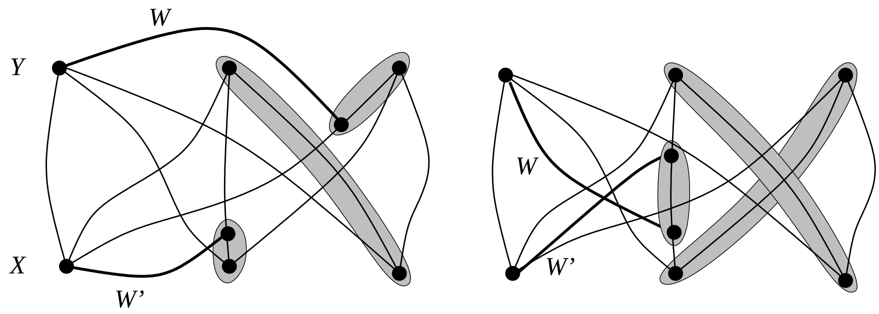

Abbildung 11:

Wir können also annehmen, daß $V^G \setminus V^{L'} \neq \emptyset$. Sei $v \in V^G \setminus V^{L'} \neq \emptyset$. Dann gibt es drei Wege von v nach $V^{L''}$, die sich nur in v schneiden. Es ist leicht zu sehen, daß $K_5 \preceq L' \cup W_1 \cup W_2 \cup W_3$. Also gilt $G = L'$.

(6) Es bleibt noch zu zeigen, daß $L' \cong L$. Das ist aber klar, weil $G = L'$ 3-zusammenhängend ist, im Gegensatz zu jeder echten Unterteilung von L'. $\square$

V. Wohlquasiordnungen

§17. Wohlquasiordnungen

(17.1) Definition. Eine Quasiordnung ist eine reflexive transitive Relation.

Eine Quasiordnung $\lesssim$ ist eine Wohlquasiordnung (WQO), wenn es bezüglich $\lesssim$ weder eine unendliche Antikette noch eine unendliche echt absteigende Folge gibt.

Sei $\lesssim$ eine Quasiordnung auf einer Menge X und $x_i \in X$ für $i \geq 1$. Die Folge $(x_i)_{i\geq 1}$ heißt gut (bezgl. $\lesssim$), wenn es ein Paar (i,j) gibt mit $x_i \lesssim x_j$, ein solches Paar nennen wir gutes Paar. Wenn die Folge kein gutes Paar enthält, nennen wir sie schlecht (bezgl. $\lesssim$).

(17.2) Lemma. Eine Quasiordnung $\lesssim$ ist genau dann eine WQO, wenn es keine bezgl. $\lesssim$ schlechte Folge gibt.

Beweis: „$\Longleftarrow$": trivial.
„$\Longrightarrow$": Für $i \geq 1$ sei $x_i \in X$. Für alle $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ gilt entweder $x_i \lesssim x_j$ oder $x_j < x_i$ oder $(x_i \not\lesssim x_j \wedge x_j \not\lesssim x_i)$. Nach dem Satz von Ramsey (0.3) gibt es eine unendliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$, so daß entweder $x_i \lesssim x_j$ für alle $i < j \in M$ oder $x_j < x_i$ für alle $i < j \in M$ oder $(x_i \not\lesssim x_j \wedge x_j \not\lesssim x_i)$ für alle $i < j \in M$ gilt. Weil es bezgl. $\lesssim$ keine unendlichen absteigenden Folgen oder Antiketten gibt, bleibt nur die Möglichkeit $x_i \lesssim x_j$ für alle $i < j \in M$. Also ist die Folge $(x_i)_{i\geq 1}$ gut. $\square$

Aus dem Beweis ergibt sich noch folgendes Korollar:

(17.3) Korollar. Sei $\lesssim$ eine Quasiordnung auf einer Menge X. Dann besitzt jede Folge $(x_i)_{i\geq 1}$ in X eine unendliche, bezgl. $\lesssim$ aufsteigende Teilfolge.

Sei $\lesssim$ eine Quasiordnung auf einer Menge X. Ein $\lesssim$-Ideal ist eine bezgl. $\lesssim$ nach unten abgeschlossene Teilmenge von X, d.h., ein $Y \subseteq X$, so daß für alle $y \in Y$ und $x \in X$ mit $x \lesssim y$ auch $x \in Y$. Ein $\lesssim$-Ideal Y ist endlich begrenzt, wenn es $x_1, \ldots, x_n$ gibt, so daß

$$Y = \{y \in X \mid \bigwedge_{1\leq i\leq n} x_i \not\lesssim y\}.$$

(17.4) Lemma. Sei $\lesssim$ eine Quasiordnung auf einer Menge X. Dann ist $\lesssim$ genau dann eine WQO, wenn jedes $\lesssim$-Ideal endlich begrenzt ist.

Beweis: „$\Longrightarrow$": Nehmen wir an, daß Y ein $\lesssim$-Ideal ist, das nicht endlich begrenzt ist. Dann gibt es für alle $x_1, \ldots, x_n \in X \setminus Y$ entweder ein $y \in Y$ und ein $i, 1 \leq i \leq n$, so daß $x_i \lesssim y$ oder ein $x_{n+1} \in X \setminus Y$, so daß $\bigwedge_{1\leq i\leq n} x_i \not\lesssim x_{n+1}$. Der erste Fall kann aber nie eintreten, da $x_i \notin Y$ und da Y ein $\lesssim$-Ideal ist. Mittels des zweiten Falles können wir eine schlechte Folge konstruieren.
„$\Longleftarrow$": Für $i \geq 1$ sei $x_i \in X$. Betrachte das Ideal $Y := \{y \mid \bigwedge_{i\geq 1} x_i \not\lesssim y\}$. Wähle $z_1, \ldots, z_n$, so daß $Y = \{y \mid \bigwedge_{1\leq i\leq n} z_i \not\lesssim y\}$. Für $1 \leq i \leq n$ existiert ein $k_i \geq 1$, so daß $x_{k_i} \lesssim z_i$ (denn sonst wäre $z_i \in Y$). Sei $k \geq \max\{k_1, \ldots, k_n\}$. Dann existiert ein $i, 1 \leq i \leq n$, so daß $z_i \lesssim x_k$, denn sonst wäre $x_k \in Y$. Also gilt $x_{k_i} \lesssim x_k$ und die Folge $(x_i)_{i\geq 1}$ ist gut. □

(17.5) Korollar. Der Minorensatz (3.1) ist äquivalent zur Aussage, daß die Minorenrelation $\preceq$ auf der Klasse aller Graphen eine WQO ist.

(17.6) Beispiel. $\subseteq_t$ ist keine WQO auf der Klasse aller Graphen.

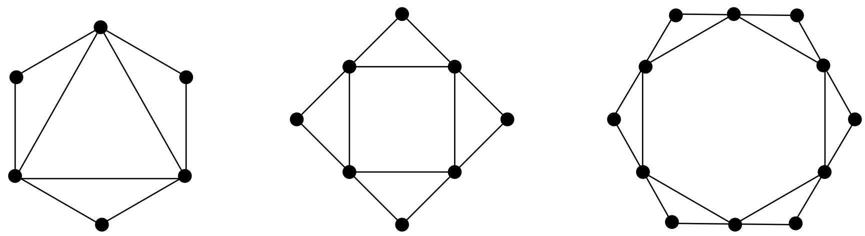

Abbildung 12: Die Graphen D_3, D_4 und D_6

Um das zu sehen, definieren wir Graphen D_n, für $n \geq 3$: D_n ist der Graph, der aus einem Kreis C_n entsteht, wenn man jede Kante zu einem Dreieck erweitert. Formal definieren wir D_n durch:

$$\begin{aligned} V^{D_n} &:= \{1, \ldots, n\} \times \{1, 2\}, \\ E^{D_n} &:= \big\{ (1,i)(1,j) \;\big|\; 1 \leq i \leq n, i - j \equiv 1 \pmod{n} \big\} \\ &\quad \cup \big\{ (1,i)(2,i) \;\big|\; 1 \leq i \leq n \big\} \\ &\quad \cup \big\{ (1,i)(2,j) \;\big|\; 1 \leq i \leq n, i - j \equiv 1 \pmod{n} \big\} \end{aligned}$$

(vgl. Abb. 12). Es ist leicht zu sehen, daß die Graphen D_n, für $n \geq 1$, eine unendliche Antikette bezgl. $\subseteq_t$ bilden.

(17.7) Korollar. $\subseteq_t$ ist eine WQO auf der Klasse aller Graphen G mit Maximalgrad $\Delta(G) \leq 3$.

(17.8) Lemma. Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von Graphen, die sowohl $\preceq$- als auch $\subseteq_t$-Ideal ist, d.h. die unter Minorenbildung und Kantenunterteilung abgeschlossen ist.

Dann ist $\mathcal{C}$ bezgl. $\subseteq_t$ endlich begrenzt, d.h. es gibt eine endliche Familie $H_1, \ldots, H_n$ von Graphen, so daß

$$\mathcal{C} = \big\{ G \;\big|\; \bigwedge_{i=1}^{n} H_i \not\subseteq_t G \big\}.$$

Beweis: Sei $\mathcal{H} := \{H \mid H \notin \mathcal{C}, \forall G \subset_t H : G \in \mathcal{C}\}$. Wir zeigen zunächst:

Für alle $K \notin \mathcal{C}$ gibt es nur endlich viele $H \in \mathcal{H}$, so daß $K \preceq H$. (*)

Sei $H \in \mathcal{H}$ mit $K \preceq H$. Weil alle $H' \subset_t H$ und damit auch alle ihre Minoren in $\mathcal{C}$ enthalten sind, gibt es geht K aus H allein durch eine Folge von Kontraktionen von Kanten vw hervor, bei denen sowohl v als auch w Grad ≥ 3 haben. Genauer gibt es eine Folge

$$H = K_1 \succeq K_2 \preceq \cdots \succeq K_l = K$$

und, für $1 \leq i \leq l-1$,Kanten $e_i = v_i w_i \in E^{K_i}$ für $2 \leq i \leq l$, so daß $K_{i+1} = K_i / e_i$ und $d^{K_i}(v_i), d^{K_i}(w_i) \geq 3$.
Sei $f(G) := \sum_{v \in V^G} 2^{d^G(v)}$. Dann gilt $f(K_i) \leq f(K_{i+1})$ für $1 \leq i \leq l-1$, also $f(H) \leq f(K)$. Es gibt aber nur endlich viele H mit $f(H) \leq f(K)$. Das zeigt $(*)$.

Nach dem Minorensatz existieren $K_1, \ldots, K_m$, so daß $\mathcal{C} = \{G \mid \forall i, 1 \leq i \leq m : K_i \not\preceq G\}$. Für $1 \leq i \leq m$ sei $\mathcal{H}_i := \{H \in \mathcal{H} \mid K_i \preceq H\}$. Dann gilt

$$\mathcal{C} = \{G \mid \forall H \in \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{H}_i : H \not\subseteq_t G\} \qquad (**)$$

Daraus folgt die Behauptung, weil $\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{H}_i$ wegen $(*)$ endlich ist.
Um $(**)$ zu zeigen, sei zunächst $G \in \mathcal{C}$. Angenommen, es gibt ein i und ein $H \in \mathcal{H}_i$, so daß $H \subseteq_t G$. Dann gibt es einen Graphen $G' \subseteq_t G$, so daß $H \cong G'$. Da $\mathcal{C}$ ein $\subseteq_t$-Ideal ist, gilt $G' \in \mathcal{C}$. Aus $K_i \preceq H$ folgt $K_i \preceq G'$ - Widerspruch.
Nehmen wir umgekehrt an, $G \notin \mathcal{C}$. Dann existiert ein $H \in \mathcal{H}$ mit $H \subseteq_t G$. Weil $H \notin \mathcal{C}$ existiert ein $i, 1 \leq i \leq m$, so daß $K_i \preceq H$. Also gilt $H \in \mathcal{H}_i$. □

(17.9) Bemerkung. Der Beweis von Lemma (17.8) verwendet zwar den Minorensatz, aber nur, um zu zeigen, daß $\mathcal{C}$ bezgl. $\preceq$ endlich begrenzt ist.

Tatsächlich läßt sich (ohne Verwendung des Minorensatztes) leicht zeigen, daß eine Klasse $\mathcal{C}$, die sowohl $\preceq$- als auch $\subseteq_t$-Ideal ist, genau dann bezgl. $\preceq$ endlich begrenzt ist, wenn sie bezgl. $\subseteq_t$ endlich begrenzt ist.

§18. Der Satz von Kruskal

Für eine Menge X bezeichne $\mathcal{P}_{<\omega}(X)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von X.

(18.1) Lemma (Higman 1952). Sei $\lesssim$ eine WQO auf einer Menge X.
Sei $\lesssim^*$ wie folgt auf $\mathcal{P}_{<\omega}(X)$ definiert:

$$Y \lesssim^* Z :\Longleftrightarrow \exists h : Y \to Z \text{ injektiv } \forall y \in Y : y \lesssim h(y)$$

(für $Y, Z \in \mathcal{P}_{<\omega}(X)$).

Dann ist $\lesssim^*$ eine WQO.

Beweis: Angenommen, $\lesssim^*$ ist keine WQO. Dann gibt es eine schlechte Folge bezgl. $\lesssim$. Wir definieren induktiv eine minimale schlechte Folge $(Y_i)_{i\geq 1}$: Nehmen wir an, $Y_1, \dots, Y_{i-1}$ sind schon definiert, und zwar so, daß es eine schlechte Folge gibt, in der $(Y_j)_{1\leq j\leq i-1}$ ein Anfangstück ist. Dann wählen wir ein Y_i minimaler Mächtigkeit, so daß $(Y_j)_{1\leq j\leq i}$ Anfangstück einer schlechten Folge ist.
Dann ist $(Y_i)_{i\geq 1}$ in der Tat eine schlechte Folge, und es gilt $Y_i \neq \emptyset$ für alle $i \geq 1$.
Für $i \geq 1$ sei $y_i \in Y_i$ und $Z_i := Y_i \setminus \{y_i\}$. Da $\lesssim$ eine Wohlquasiordnung ist, besitzt die Folge $(y_i)_{i\geq 1}$ eine unendliche aufsteigende Teilfolge $(y_{k_i})_{i\geq 1}$ für geeignete $k_1 < k_2 < \cdots$.
Ich behaupte, daß die Folge $(Z_{k_i})_{i\geq 1}$ gut bezgl. $\lesssim^*$ ist. Nach Definition von Y_{k_1} ist die Folge

$$Y_1, \dots, Y_{k_1-1}, Z_{k_1}, Z_{k_2}, \dots$$

gut, besitzt also ein gutes Paar (l, m). Weil $(Y_i)_{i\geq 1}$ schlecht ist und $Z_{k_i} \subset Y_{k_i}$ und damit $Z_{k_i} \lesssim^* Y_{k_i}$, gilt $m > l \geq k_1$. Also ist (l, m) auch ein gutes Paar für $(Z_{k_i})_{i\geq 1}$.
Aber $Z_l \lesssim^* Z_m$ und $y_l \lesssim y_m$ implizieren $Y_l \lesssim^* Y_m$. Damit ist (l, m) auch ein gutes Paar für die schlechte Folge $(Y_i)_{i\geq 1}$ - ein Widerspruch. $\square$

Eine Baumordnung auf einem Baum T ist eine partielle Ordnung $\leq$ auf V^T, so daß

$$E^T = \{tu \mid t \leq u, \forall v \neg h(t) \leq^{T'} h(v) \leq^{T'} h(u)\}.$$

Ein <u>Ordnungsbaum</u> ist ein Tripel $T = (V^T, E^T, \leq^T)$, bestehend aus einem Baum (V^T, E^T) und einer Baumordnung $\leq^T$ auf diesem Baum. In jedem Ordnungsbaum T gibt es ein eindeutiges minimales Element r^T bezgl. $\leq^T$, das wir als die <u>Wurzel</u> von T bezeichnen. Für ein $s \in V^T$ sei

$$T(t) := \big(\{s \in V^T \mid t \leq s\}, E^T \cap \mathcal{P}_2(\{s \in V^T \mid t \leq s\}), \leq^T \restriction_{\{s \in V^T \mid t \leq s\}}\big).$$

Um die Notation zu vereinfachen, unterscheiden wir gelegentlich nicht zwischen dem Ordnungsbaum $T(t)$ und der Knotenmenge $V^{T(t)}$ und schreiben etwa $s \in T(t)$ anstatt $s \in V^{T(t)}$.
Sind $s, t \in V^T$ mit $st \in E^T$ und $s \leq t$, so bezeichnen wir s als <u>Vater</u> von t und t als <u>Kind</u> von s.
Schließlich setzen wir für $s, t \in V^T$

$$s \wedge^T t := \max\{u \mid u \leq^T s, t\}.$$

Wir definieren eine Quasiordnung $\lesssim$ auf der Klasse aller Ordnungsbäume durch

$$T \lesssim T' \;:\Longleftrightarrow\; \exists h : V^T \to V^{T'} \forall s, t \in V^T:\; h(s \wedge^T t) = h(s) \wedge^{T'} h(t).$$

Wir schreiben für ein solches h auch $h : T \lesssim T'$.

<u>(18.2) Lemma.</u> $\lesssim$ ist eine WQO auf der Klasse aller Ordnungsbäume.

<u>Beweis:</u> Nehmen wir an, die Behauptung ist falsch. Wir konstruieren wieder eine minimale schlechte Folge $(T_i)_{i \geq 1}$. Dazu definieren wir die <u>Höhe</u> eines Ordnungsbaumes T als die maximale Länge einer $\leq^T$-Kette. Angenommen, $T_, \dots, T_{i-1}$ sind schon definiert, und zwar so, daß es eine schlechte Folge gibt, in der $(T_j)_{1 \leq j \leq i-1}$ ein Anfangstück ist. Dann wählen wir ein T_i minimaler Höhe, so daß $(T_j)_{1 \leq j \leq i}$ Anfangstück einer schlechten Folge ist.
OBdA können wir annehmen, daß die V^{T_i} für $i \geq 1$ paarweise disjunkt sind. Für $i \geq 1$ sei

$$\mathcal{S}_i := \left\{T_i(t) \;\middle|\; t \text{ Kind von } r^{T_i}\right\}.$$

Sei $\mathcal{S} := \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{S}_i$. Nach Konstruktion von der Folge $(T_i)_{i \geq 1}$ ist die Einschränkung von $\lesssim$ auf $\mathcal{S}$ eine WQO. Nach Lemma (18.1) ist damit auch $\lesssim^*$ eine WQO von $\mathcal{P}_{<\omega}(\mathcal{S})$.

Dann besitzt die Folge $(\mathcal{S}_i)_{i\geq 1}$ ein gutes Paar (i,j). Es ist leicht zu sehen, daß aus $\mathcal{S}_i \lesssim^* \mathcal{S}_j$ auch $T_i \lesssim T_j$ folgt. Widerspruch. $\square$

(18.3) Korollar (Kruskal 1960). Die Einschränkungen von $\subseteq_t$ und $\preceq$ auf die Klasse aller Bäume sind WQOen.

Beweis: $T \lesssim T'$ impliziert sowohl $(V^T, E^T) \subseteq_t (V^{T'}, E^{T'})$ als auch $(V^T, E^T) \preceq (V^{T'}, E^{T'})$. $\square$

Sei $l \in \mathbb{N}$. Eine l-Färbung eines Baumes T ist eine Abbildung $\lambda : V^T \to \{1, \dots, l\}$. Als einen l-gefärbten Ordnungsbaum bezeichnen wir ein Tupel $(V^T, E^T, \leq^T, \lambda^T)$, wobei $(V^T, E^T, \leq^T)$ ein Ordnungsbaum ist und λ eine l-Färbung von (V^T, E^T).
Wir definieren folgendermaßen eine Quasiordnung $\lesssim$ auf der Klasse aller gefärbten Ordnungsbäume: Wir setzen $T \lesssim T'$, wenn es ein $h : (V^T, E^T, \leq^T) \lesssim (V^{T'}, E^{T'}, \leq^{T'})$ gibt mit

- $\lambda^T(t) = \lambda^{T'}(h(t))$ für alle $t \in V^T$.
- Für alle $tu \in E^T$ mit $t \leq^T u$ und $t' \in V^{T'}$ mit $h(t) <^{T'} t' \leq^{T'} h(u)$ gilt $\lambda^{T'}(t') \geq \lambda^{T'}(h(u))$.

Wir schreiben für ein solches h wieder $h : T \lesssim T'$.

(18.4) Satz (Friedman 1982). Sei $l \geq 1$. Dann ist die Einschränkung von $\lesssim$ auf die Klasse aller l-gefärbten Ordnungsbäume eine WQO.

Beweis: Wir zeigen einen allgemeineren Satz: Sei $l \geq 1$ und $\lessapprox$ eine Quasiordnung auf einer Menge X. Ein $(l, \lessapprox)$-Färbung eines Baumes T ist eine Abbildung $\lambda : V^T \to \{1, \dots, l\} \cup X$ mit $\lambda(t) \in X$, falls t ein Blatt von T ist und $\lambda(t) \in \{1, \dots, l\}$, falls t ein innerer Knoten ist. Als einen $(l, \lessapprox)$-gefärbten Ordnungsbaum bezeichnen wir ein Tupel $(V^T, E^T, \leq^T, \lambda^T)$, wobei $(V^T, E^T, \leq^T)$ ein Ordnungsbaum ist und λ^T eine $(l, \lessapprox)$-Färbung von (V^T, E^T). $\mathcal{T}(l, \lessapprox)$ bezeichne die Menge aller $(l, \lessapprox)$-gefärbten Ordnungsbäume.

Als $\mathcal{T}(0, \lessapprox)$ betrachten wir die Klasse aller gefärbten Ordnungsbäume der Ordnung 1, deren Knoten mit einem Element aus dem Definitionsbereich von $\lessapprox$ gefärbt ist.
Wir definieren eine Quasiordnung $\lesssim$ auf $\mathcal{T}(l, \lessapprox)$ wie folgt: Wir setzen $T \lesssim T'$, wenn es ein $h : (V^T, E^T, \leq^T) \lesssim (V^{T'}, E^{T'}, \leq^{T'})$ gibt mit

(1) Ist $t \in V^T$ ein innerer Knoten, so ist auch $h(t)$ ein innerer Knoten und es gilt $\lambda^T(t) = \lambda^{T'}(h(t))$.

(2) Ist $t \in V^T$ ein Blatt, so ist auch $h(t)$ ein Blatt und es gilt $\lambda^T(t) \lessapprox \lambda^{T'}(h(t))$.

(3) Sind $t, u \in V^T$ innere Knoten mit $tu \in E^T$ und $t \leq u$, so gilt $\lambda^{T'}(t') \geq \lambda^{T'}(h(u))$ für alle $t' \in V^{T'}$ mit $h(t) <^{T'} t' \leq^{T'} h(u)$.

Wir definieren eine weitere Ordnung $\lesssim^+$ auf $\mathcal{T}(l, \lessapprox)$ wie $\lesssim$, aber mit der zusätzlichen Bedingung

(4) Für alle $t' \leq^{T'} h(r^T)$ gilt $\lambda^{T'}(t') \geq \lambda^{T'}(h(r^T))$.

Wir zeigen:

$$\text{Für alle } l \geq 0 \text{ und alle Wohlquasiordnungen } \lessapprox \text{ ist } \lesssim^+ \text{ eine WQO auf } \mathcal{T}(l, \lessapprox). \tag{A}$$

Die Aussage des Satzes folgt unmittelbar.

Seien $l \geq 0$, $\lessapprox$ eine Quasiordnung und $T \in \mathcal{T}(l+1, \lessapprox)$ mit $|T| > 1$. Wir setzen $\mu(T) := \min\{\lambda^T(t) \mid t \in \text{ innerer Knoten}\}$ und definieren

$$T^* \in \mathcal{T}(l, \lesssim \restriction_{\mathcal{T}(l+1, \lessapprox)})$$

wie folgt: T^* entsteht aus T, indem wir jeden bezgl. $\leq^T$ minimalen inneren Knoten $t \in V^T$ zu einem Blatt machen mit $\lambda^{T^*}(t) := T(t)$. (Hier bezeichnet $T(t)$ den $(l+1, \lessapprox)$-gefärbten Ordnungsbaum mit $\lambda^{T(t)} = \lambda^T\restriction_{V^{T(t)}}$.) Für alle inneren Knoten von T^* setzen wir $\lambda^{T^*}(t) := \lambda^T(t) - 1$. Für alle Blätter t von T^*, die auch Blätter von T sind, setzen wir $\lambda^{T^*}(t) := (\{t\}, \emptyset, \emptyset, \{t \mapsto \lambda^T(t)\})$. Es ist leicht zu sehen, daß für alle $T_1, T_2 \in \mathcal{T}(l+1, \lessapprox)$ mit $|T_1|, |T_2| > 1$ gilt:

$$\mu(T_1) = \mu(T_2) \text{ und } T_1^* \lesssim^+ T_2^* \implies T_1 \lesssim^+ T_2. \tag{B}$$

Wir beweisen (A) durch Induktion über $l \geq 0$: Die Induktionsannahme $l = 0$ ist trivial.

Im folgenden halten wir ein $l \geq 0$ fest und nehmen an, die Behauptung gilt für l, d.h.

Für alle WQOen $\lessapprox$ ist $\lesssim^+$ WQO auf $\mathcal{T}(l, \lessapprox)$. (IA)

Zunächst zeigen wir:

Sei $\lessapprox$ eine WQO. Wenn $\lesssim$ WQO auf $\mathcal{T}(l+1, \lessapprox)$ ist, so auch $\lesssim^+$. (C)

Um das zu sehen, wählen wir eine Folge $(T_i)_{i\geq 1}$ in $\mathcal{T}(l+1, \lessapprox)$. OBdA können wir annehmen, daß $|T_i| > 1$ für alle $i \geq 1$ und daß $\mu(T_i) = \mu(T_j)$ für alle $i, j \geq 1$.
Wegen (IA) und weil $\lesssim$ WQO auf $\mathcal{T}(l+1, \lessapprox)$ ist, ist die Folge $(T_i^*)_{i\geq 1}$ aus $\mathcal{T}(l, \lesssim \restriction_{\mathcal{T}(l+1, \lessapprox)})$ gut bezgl. $\lesssim^+$, hat also ein gutes Paar (i, j). Wegen (B) gilt auch $T_i \lesssim^+ T_j$, also ist (i, j) auch ein gutes Paar unserer ursprünglichen Folge. Das zeigt (C).

Um den Induktionschritt (im Beweis von (A)) abzuschließen, reicht es wegen (C), zu zeigen:

Für alle WQOen $\lessapprox$ ist $\lesssim$ WQO auf $\mathcal{T}(l+1, \lessapprox)$. (D)

Nehmen wir an, Behauptung (D) ist falsch für eine Quasiordnung $\lessapprox$. Wie im Beweis von Lemma (18.2) konstruieren wir eine minimale schlechte Folge $(T_i)_{i\geq 1}$ von $(l+1, \lessapprox)$-gefärbten Ordnungsbäumen bezgl. $\lesssim$. OBdA sind die T_i, für $i \geq 1$, paarweise disjunkt.
Wir setzen

$$\mathcal{S} := \{T_i(t) \mid i \geq 1, t \in V^{T_i} \setminus \{r^{T_i}\}\}.$$

Dann gilt:

Die Einschränkung von $\lesssim$ auf $\mathcal{S}$ ist eine WQO. (E)

Denn angenommen, $(S_j)_{j\geq 1}$ ist eine schlechte Folge in $\mathcal{S}$. Sei $i \geq 1$, so daß $S_1 = T_i(t)$ für ein $t \in V^{T_i}$. Dann ist die Folge

$$T_1, \ldots, T_{i-1}, S_1, S_2, \ldots$$

nach Konstruktion von $(T_i)_{i\geq 1}$ gut. Ein gutes Paar dieser Folge muß aber aus Indizes $> (i-1)$ bestehen (man beachte, daß dies nicht der Fall wäre, wenn wir $\lesssim^+$ statt $\lesssim$ verwenden würden), ist also auch ein gutes Paar für $(S_j)_{j\geq 1}$. Das zeigt (E).

Völlig analog zu (C) können wir jetzt zeigen:

Die Einschränkung von $\lesssim^+$ auf $\mathcal{S}$ ist eine WQO. (F)

Nach dem Lemma von Higman ist dann $(\lesssim^+)^*$ eine WQO auf $\mathcal{P}_{<\omega}(\mathcal{S})$.

OBdA können wir annehmen, daß $V^{T_i} \cap V^{T_j} = \emptyset$ und daß $\lambda^{T_i}(r^{T_i}) = \lambda^{T_j}(r^{T_j}) \in \{1, \dots, l+1\}$ für alle $i, j \geq 1$.
Für $i \geq 1$ setzen wir jetzt

$$\mathcal{S}_i := \left\{T_i(t) \;\middle|\; t \text{ Kind von } r^{T_i}\right\}.$$

Dann besitzt die Folge $(\mathcal{S}_i)_{i \geq 1}$ ein gutes Paar (i, j) bezgl. $(\lesssim^+)^*$. Es folgt, daß $T_i \lesssim T_j$. □

§19. Schlanke Baumzerlegungen

(19.1) Definition. Eine Baumzerlegung $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eines Graphen G ist schlank, wenn es für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t, u \in V^T$ entweder k disjunkte Wege von B_t nach B_u oder ein $s \in tTu$ mit $|B_s| < k$ gibt.

(19.2) Lemma (Thomas 1990). Jeder Graph G hat eine schlanke Baumzerlegung der Weite $\mathrm{bw}(G)$.

Beweis: Sei $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine Baumzerlegung eines Graphen G. Eine l-Zelle, für ein $l \geq 1$, ist eine zusammenhängende Teilmenge $Z \subseteq V^T$ mit $|B_t| \geq l$ für alle $t \in Z$. Der Rang von $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ ist die Abbildung $\rho_{(T,(B_t)_{t \in V^T})} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$\rho_{(T,(B_t)_{t \in V^T})}(l) := \text{Anzahl der } l\text{-Zellen in } (T, (B_t)_{t \in V^T}).$$

Man beachte, daß $\rho_{(T,(B_t)_{t \in V^T})}$ nur an endlich vielen Stellen von '0' verschieden ist.
Wir ordnen die Ränge lexikographisch, d.h. für Ränge $\rho, \rho' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei

$$\rho < \rho' \;:\Longleftrightarrow\; \exists l \in \mathbb{N} : \big(\rho(l) < \rho'(l) \wedge \forall l' > l \; \rho(l') = \rho'(l')\big).$$

Dies ist eine fundierte lineare Ordnung auf den Rängen.

Sei nun $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine Baumzerlegung minimalen Ranges von G. Wir zeigen:

$$(T, (B_t)_{t \in V^T}) \text{ ist schlank.} \tag{A}$$

Nehmen wir an, das ist nicht der Fall. Wir wählen Knoten $t^1, t^2 \in V^T$ und $k \geq 1$, so daß es k, aber nicht $(k+1)$ disjunkte Wege von B_{t^1} nach B_{t^2} und kein $u \in t^1 T t^2$ mit $|B_u| \leq k$ gibt. Seien $W_1, \ldots, W_k$ disjunkte Wege von B_{t^1} nach B_{t^2}. Sei (G^1, G^2) eine Zerlegung von G der Ordnung k mit $B_{t^1} \subseteq V^{G^1}$ und $B_{t^2} \subseteq V^{G^2}$. Sei $X := V^{G^1} \cap V^{G^2}$ und, für $1 \leq i \leq k$, $x_i \in V^{W_i} \cap X$, so daß $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Für $1 \leq i \leq k$ sei $s_i \in V^T$, so daß $x_i \in B_{s_i}$. Für $t \in V^T$ setzen wir

$$B_t^1 := (B_t \cap V^{G^1}) \cup \{x_i \mid 1 \leq i \leq k, t \in s_i T t^2\},$$
$$B_t^2 := (B_t \cap V^{G^2}) \cup \{x_i \mid 1 \leq i \leq k, t \in s_i T t^1\}.$$

Seien T^1 und T^2 disjunkte Kopien von T und $f^i : T \cong T^i$ für $i \in \{1, 2\}$. Sei

$$T^* := (T^1 \cup T^2) + f^1(t^2) f^2(t^1)$$

und für $t \in V^T$

$$B^*_{f^1(t)} := B_t^1, \quad B^*_{f^2(t)} := B_t^2.$$

Man beachte, daß

$$B^*_{f^1(t^2)} = B^*_{f^2(t^1)} = X. \tag{B}$$

Ferner gilt für $i \in \{1, 2\}$ und $t \in T^i$

$$B_t^* \leq B_{(f^i)^{-1}(t)}, \tag{C}$$

denn für jeden Block B_t für ein $t \in s_j T t^{3-i}$ gilt $B_t \cap V^{W_j} \cap G^{3-i} \neq \emptyset$.

Wir zeigen jetzt:

$$(T^*, (B_t^*)_{t \in V^{T^*}}) \text{ ist eine Baumzerlegung von } G \tag{D}$$

mit

$$\rho_{(T^*, (B_t^*)_{t \in V^{T^*}})} < \rho_{(T, (B_t)_{t \in V^T})}. \tag{E}$$

Das widerspricht der Minimalität des Ranges von $(T, (B_t)_{t\in V^T})$.

Beweis von (D): Es gilt

$$\begin{aligned}\bigcup_{t\in V^{T^*}} \langle B_t^* \rangle &= \bigcup_{t\in V^T} \langle B_t^1 \rangle \cup \bigcup_{t\in V^T} \langle B_t^2 \rangle \\ &\supseteq \bigcup_{t\in V^T} \langle V^{G^1} \cap B_t \rangle \cup \bigcup_{t\in V^T} \langle V^{G^2} \cap B_t \rangle \\ &\supseteq G^1 \cup G^2 = G.\end{aligned}$$

Für $v \in V^{G^1} \setminus X$ gilt $(B^*)^{-1}(v) = f^1(B^{-1}(v))$; diese Menge ist zusammenhängend in T^*. Für $1 \leq i \leq k$ gilt

$$(B^*)^{-1}(x_i) = f^1(B^{-1}(x_i)) \cup f^1(s_i T t^2) \cup f^2(t^1 T s_i) \cup f^2(B^{-1}(x_i)),$$

auch diese Menge ist zusammenhängend in T^*. Das beweist (D).

(E) folgt aus folgenden drei Behauptungen:

> Sei $l > k$. Dann gibt es für jede l-Zelle Z^* von $(T^*, (B_t^*)_{t\in V^{T^*}})$ eine l-Zelle Z von $(T, (B_t)_{t\in V^T})$, so daß $Z^* = f^1(Z)$ oder $Z^* = f^2(Z)$. (F)

Beweis: Sei Z^* eine l-Zelle von $(T^*, (B_t^*)_{t\in V^{T^*}})$. Wegen (B) gilt $Z^* \subseteq V^{T^1} \setminus \{f^1(t^2)\}$ oder $Z^* \subseteq T^1 \setminus \{f^2(t^1)\}$. Sagen wir, $Z^* \subseteq V^{T^1}$. Wegen (C) ist dann $(f^1)^{-1}$ eine l-Zelle. Das zeigt (F).

> Sei $l > k$ und Z eine l-Zelle von $(T, (B_t)_{t\in V^T})$. Dann ist entweder $f^1(Z)$ oder $f^2(Z)$ keine l-Zelle von $(T^*, (B_t^*)_{t\in V^{T^*}})$, oder es gibt ein $l' > l$, so daß Z eine l'-Zelle von $(T, (B_t)_{t\in V^T})$ ist und daß weder $f^1(Z)$ noch $f^2(Z)$ l'-Zellen von $(T^*, (B_t^*)_{t\in V^{T^*}})$ sind. (G)

Beweis: Nehmen wir an, sowohl $f^1(Z)$ als auch $f^2(Z)$ sind l-Zellen von $(T^*, (B_t^*)_{t\in V^{T^*}})$. Sei $t \in Z$; wir zeigen $|B_t| > |B_t^1|$. Aus Symmetriegründen folgt $|B_t| > |B_t^2|$. Damit sind wir fertig.
Es gilt

$$|B_t| = |B_t^1 \setminus X| + |B_t^2 \setminus X| + |(B_t^1 \cup B_t^2) \cap X|.$$

Da $l > k$ und $|B_t^2| \geq l$ gilt $B_t^2 \setminus X \neq \emptyset$. Also

$$|B_t^1| \leq |B_t^1 \setminus X| + |(B_t^1 \cup B_t^2) \cap X| < |B_t|.$$

Damit ist (G) bewiesen.

> Es gibt eine $(k+1)$-Zelle Z von $(T,(B_t)_{t\in V^T})$, so daß weder $f^1(Z)$ noch $f^2(Z)$ $(k+1)$-Zellen von $(T^*,(B^*_t)_{t\in V^{T^*}})$ sind. (H)

Beweis: Sei $Z = t^1Tt^2$. Nach der Wahl von t^1 und t^2 ist Z eine $(k+1)$-Zelle. Da $f^1(t^2) \in f^1(Z)$ und $f^2(t^1) \in f^2(Z)$, sind diese Mengen wegen (B) keine $(k+1)$-Zellen von $(T^*,(B^*_t)_{t\in V^{T^*}})$. Das zeigt (H).

Beweis von (E): Angenommen, $\rho_{(T^*,(B^*_t)_{t\in V^{T^*}})} \geq \rho_{(T,(B_t)_{t\in V^T})}$. Wir zeigen induktiv für alle $l > k$:

> Für jede l-Zelle Z von $(T,(B_t)_{t\in V^T})$ ist entweder $f^1(Z)$ oder $f^2(Z)$ eine l-Zelle von $(T^*,(B^*_t)_{t\in V^{T^*}})$ (aber nicht beide). (I_l)

Für genügend große l gibt es keine l-Zellen von $(T,(B_t)_{t\in V^T})$, und Behauptung (I_l) ist wahr. Nehmen wir also an, $(I_{l'})$ gilt für alle $l' > l$. Wegen (G) gibt es dann keine l-Zelle Z, so daß sowohl $f^1(Z)$ als auch $f^2(Z)$ l-Zellen sind. (I_l) folgt jetzt aus (F) und $\rho_{(T^*,(B^*_t)_{t\in V^{T^*}})}(l) \geq \rho_{(T,(B_t)_{t\in V^T})}(l)$.
(I_{k+1}) widerspricht aber (H). Also war unsere Annahme falsch, und (E) gilt. □

§20. WQO auf Graphen beschränkter Baumweite

(20.1) Satz (Robertson und Seymour 1990). Sei $k \geq 1$. Die Einschränkung der Minorenrelation $\preceq$ auf die Klasse aller Graphen der Baumweite höchstens k ist eine WQO.

Für den Rest des Paragraphen halten wir $k \geq 1$ fest. Um den Satz zu beweisen, benötigen wir noch einige Hilfsmittel. Sei $(T,(B_t)_{t\in V^T})$ eine schlanke Baumzerlegung eines Graphen G der Weite höchstens k und $\leq$ eine Baumordnung auf T.
Eine Familie $(\beta_t)_{t\in V^T}$ von Bijektionen $\beta_t : \{1,\dots,|B_t|\} \to B_t$ nennen wir gut (bezgl. $G,(T,(B_t)_{t\in V^T}),\leq$), wenn es für alle $s,t \in V^T$ mit $s \leq t$ und $|B_s| = |B_t| =: l$ entweder ein $u \in sTt$ mit $|B_u| < l$ oder disjunkte Wege $W_1,\dots,W_l$ von B_s nach B_t gibt, so daß für

$1 \leq i \leq l$ der Weg W_i die Ecken $\beta_s(i)$ und $\beta_t(i)$ verbindet. Es ist leicht zu sehen, daß es eine gute Familie von Bijektionen gibt. Wir nennen ein Tupel $(G, (T, (B_t)_{t\in V^T}), \leq, (\beta_t)_{t\in V^T})$ <u>gut</u>, wenn G ein Graph der Baumweite höchstens k ist, $(T, (B_t)_{t\in V^T})$ schlanke Baumzerlegung von G der Weite höchstens k, $\leq$ Baumordnung auf T und $(\beta_t)_{t\in V^T}$ gute Familie bezüglich $G, (T, (B_t)_{t\in V^T}), \leq$.
Wir können jetzt jedem guten Tupel $(G, (T, (B_t)_{t\in V^T}), \leq, (\beta_t)_{t\in V^T})$ auf kanonische Weise eine Färbung $\lambda : V^T \to \{1, \dots, n(k)\}$ zuordnen (für ein geeignetes $n(k) \in \mathbb{N}$, das nur von k abhängt), so daß für $(G^1, (T^1, (B^1_t)_{t\in V^{T^1}}), \leq^1, (\beta^1_t)_{t\in V^T})$, $(G^2, (T^2, (B^2_t)_{t\in V^{T^2}}), \leq^2, (\beta^2_t)_{t\in V^T})$ mit zugehörigen λ^1, λ^2 gilt:

(L1) Für alle $t^1 \in T^1 \setminus \{r^1\}, t^2 \in T^2 \setminus \{r^2\}$ mit Vätern s^1 bzw. s^2 gilt

$$\lambda^1(t^1) \leq \lambda^2(t^2) \implies |B^1_{s^1}| \leq |B^2_{s^2}|.$$

(L2) Für die Wurzeln r^1, r^2 von T^1 bzw. T^2 gilt genau dann $\lambda^1(r^1) = \lambda^2(r^2)$, wenn die Abbildung $\beta^2_{r^2} \circ (\beta^1_{r^1})^{-1}$ ein Isomorphismus von $\langle B^1_{r^1}\rangle^{G^1}$ nach $\langle B^2_{r^2}\rangle^{G^2}$ ist.

(L3) Für alle $t^1 \in T^1 \setminus \{r^1\}, t^2 \in T^2 \setminus \{r^2\}$ mit Vätern s^1 bzw. s^2 gilt genau dann $\lambda^1(t^1) = \lambda^2(t^2)$, wenn es einen Isomorphismus

$$f : \langle B^1_{t^1} \cup B^1_{s^1}\rangle^{G^1} \to \langle B^2_{t^2} \cup B^2_{s^2}\rangle^{G^2}$$

gibt mit $(\beta^2_{t^2})^{-1} \circ f \circ \beta^1_{t^1}(l) = l$ für $1 \leq l \leq |B_{t^1}|$ und $(\beta^2_{s^2})^{-1} \circ f \circ \beta^1_{s^1}(l) = l$ für $1 \leq l \leq |B_{s^1}|$.

<u>(20.2) Lemma.</u> Seien $(G^1, (T^1, (B^1_t)_{t\in V^{T^1}}), \leq^1, (\beta^1_t)_{t\in V^T})$, $(G^2, (T^2, (B^2_t)_{t\in V^{T^2}}), \leq^2, (\beta^2_t)_{t\in V^T})$ gute Tupel mit zugehörigen Färbungen λ^1, λ^2, so daß $(T^1, \leq^1, \lambda^1) \lesssim (T^2, \leq^2, \lambda^2)$. Dann gilt $G^1 \preceq G^2$.

<u>Beweis:</u> Sei $h : (T^1, \leq^1, \lambda^1) \lesssim (T^2, \leq^2, \lambda^2)$. Für $t, u \in V^{T^2}$ mit $t \leq^2 u$ sei

$$T^2(t, u) := \left\{ s \in V^{T^2} \;\middle|\; t <^2 (s \wedge u) <^2 u \right\}$$

Man beachte, daß für alle $t, u, s \in V^{T^1}$ mit $tu \in E^{T_1}$ gilt: $h(s) \notin T^2(h(t), h(u))$.

Für $1 \le i \le 2$ und ein $t \in V^{T^i}$ sei $G^i(t) := \langle \bigcup_{t \le^i u} B_u \rangle$. Induktiv, ausgehend von den Blättern, zeigen wir für alle $t \in T^1$, daß es ein $g_t : G^1(t) \preceq G^2(h(t))$ gibt, so daß für $1 \le i \le |B_t|$ gilt:

$$\beta^2_{h(t)}(i) \in g_t(\beta^1_t(i)). \tag{$*$}$$

(Eigentlich müßten wir hier $V^{g_t(\beta^1_t(i))}$ schreiben, aber zur Vereinfachung unterscheiden wir im folgenden nicht zwischen dem Teilgraphen $g_t(v) \subseteq G^2(h(t))$ und seiner Eckenmenge.)
Sei zunächst t ein Blatt von T^1, dann definieren wir g_t durch $g_t(\beta^1_t(i)) := \langle \{\beta^2_{h(t)}(i)\} \rangle$ (für $1 \le i \le |B^1_t|$). Da $\lambda^1(t) = \lambda^2(h(t))$ ist diese Abbildung wegen (L3) (oder (L2), falls t die Wurzel von T^1 ist) eine Minoreneinbettung.
Sei nun t ein innerer Knoten von T^1. Nehmen wir zunächst an, daß t genau ein Kind u hat. Sei t' der Vater von $h(u)$ in T^2. Da $\lambda^1(u) = \lambda^2(h(u))$ gilt $|B^1_t| = |B^2_{h(t)}| = |B^2_{t'}| =: l$. Weil $(\beta^2_t)_{t \in V^T}$ gut ist, gilt wegen (L1) und der Definition von $\lesssim$ auf gefärbten Ordnungsbäumen $|B^2_s| \ge |B^2_{t'}|$ für alle s mit $h(t) <^2 s \le^2 t'$. Weil die Baumzerlegung $(T^2, (B^2_t)_{t \in V^{T^2}})$ schlank ist, gibt es paarweise disjunkte Wege $W_1, \ldots, W_l$ in G^2, so daß für $1 \le i \le l$ der Weg W_i die Ecken $\beta^2_{h(t)}(i)$ und $\beta^2_{t'}(i)$ verbindet. Diese Wege liegen, bis auf ihre Endpunkte, in $\bigcup_{s \in T(h(t),t')} B_s$. Wir können sie also kontrahieren, ohne den Graphen $G^2(h(u))$ zu verändern.
Wir definieren g_t wie folgt: Für $1 \le i \le l$ setzen wir

$$g_t(\beta^1_t(i)) := \begin{cases} \langle W_i \rangle & \text{falls } \beta^1_t(i) \notin G^1(u), \\ \langle W_i \cup g_u(\beta^1_t(i)) \rangle & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $v \in G^1(u) \setminus B^1_t$ setzen wir $g_t(v) := g_u(v)$. Wegen (L3) ist g_t eine Minoreneinbettung von $G^1(t)$ in $G^2(h(t))$. Weil für $1 \le i \le l$ die Ecke $\beta^2_{h(t)}(i)$ in W_i enthalten ist, erfüllt diese auch $(*)$.
Falls t mehrere Kinder hat, so können wir einfach die zugehörigen Bilder von Ecken $\beta^1_t(i)$ vereinigen. Weil für Kinder $u \ne u'$ von u die Teilbäume $T(t,u)$ und $T(t,u')$ disjunkt sind, kommen sich die Wege W_i in den einzelnen Teilen nicht in die Quere. □

<u>Beweis (von Satz (20.1)):</u> Sei $(G^i)_{i \ge 1}$ eine Folge von Graphen der Baumweite höchstens k.
Für jedes $i \ge 1$ sei $(T^i, (B^i_t)_{t \in V^{T^i}})$ eine schlanke Baumzerlegung von G^i der Weite höchstens k, $\le^i$ eine Baumordnung von T^i und

$(\beta_t^i)_{t \in V^{T^i}}$ eine gute Familie von Bijektionen $\beta_t^i : \{1, \ldots, |B_t^i|\} \to B_t^i$.
Sei λ^i die zugehörige Färbung von T^i.
Nach Satz (18.4) besitzt die Folge $(T^i, \leq^i, \lambda^i)$ ein gutes Paar (i, j) bezgl. $\lesssim$. Nach Lemma (20.2) ist (i, j) auch ein gutes Paar für die Folge $(G^i)_{i \geq 1}$ bezgl. $\preceq$. $\square$

VI. Der Gittersatz

In diesem Kapitel beweisen wir einen wichtigen technischen Satz von Robertson und Seymour, der besagt, daß ein Graph genau dann große Baumweite hat, wenn er ein großes Gitter als Minor enthält.
Der hier gegebene Beweis stammt im wesentlichen von Diestel, Gorbunov, Jensen und Thomassen (1999).

§21. Der Satz

<u>(21.1) Satz.</u> Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq 1$ jeder Graph der Baumweite mindestens $f(n)$ ein $(n \times n)$-Gitter als Minor enthält.

Der Beweis des Satzes verläuft in drei Schritten: Wir führen zwei neue Konfigurationen in Graphen ein, <u>Gewirre</u> und <u>Gewebe</u>. In §22 zeigen wir, daß ein Graph großer Baumweite ein großes Gewirr enthält. In §23 zeigen wir, daß ein großes Gewirr ein großes Gewebe enthält. In §24 zeigen wir schließlich, daß ein großes Gewebe ein großes Gitter als Minor enthält.

§22. Gewirre

<u>(22.1) Definition.</u> Seien $k, l \geq 1$ und G ein Graph. Ein <u>(k,l)-Gewirr</u> in G ist ein Tupel $(A_1, \ldots, A_k, B)$ von disjunkten Teilmengen von V^G, für das gilt:

(1) $\langle A_1 \rangle^G, \ldots, \langle A_l \rangle^G$ sind zusammenhängend.

(2) Für $1 \leq i < j \leq k$ gibt es eine Familie von l paarweise

disjunkten Wegen von A_i nach A_j, deren innere Ecken alle in B liegen.

(22.2) Lemma. Seien $k, l \geq 1$ und G ein Graph der Baumweite mindestens $(k+1)l-1$. Dann gibt es in G ein (k,l)-Gewirr.

Beweis: OBdA sei G zusammenhängend.
Angenommen, es gibt kein (k,l)-Gewirr in G.

Sei $U \subseteq V^G$ maximal mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\langle U \rangle^G$ besitzt eine Baumzerlegung $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ der Weite höchstens $(k+1)l-2$.

(2) Für alle Komponenten C von $G \setminus U$ gilt:

(a) Es gibt ein $t \in V^T$ mit $N(C) \subseteq B_t$.

(b) Es gibt zusammenhängende disjunkte Teilmengen $A_1, \ldots, A_k \subseteq V^G \setminus C$, so daß $N(C) \subseteq \bigcup_{i=1}^k A_i$ und $N(C) \cap A_i \leq l$ für $1 \leq i \leq k$.

Man beachte, daß jede k-elementige Teilmenge von G (1) und (2) erfüllt. Also ist U wohldefiniert. Wegen $\mathrm{bw}(G) \geq (k+1)l-1$ gilt $U \neq V^G$.

Sei C eine Komponente von $G \setminus U$, $X := N(C)$. Sei $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine Baumzerlegung von $\langle U \rangle^G$ der Weite höchstens $(k+1)l-2$ und $t \in V^T$ mit $X \subseteq B_t$. Seien $A_1, \ldots, A_k$ gemäß (2b) gewählt. Für $1 \leq i \leq k$ sei $X_i := X \cap A_i$.

Wir zeigen zunächst, daß $|X_i| = l$ für $1 \leq i \leq k$.
Nehmen wir an, daß $1 \leq |X_i| < l$ für ein $i, 1 \leq i \leq k$. Sei $v \in C \cap N(X_i)$ und $A_i' := A_i \cup \{v\}$. Für $j \neq i$ sei $A_j' := A_j$. Sei $U' := U \cup \{v\}$. Wir definieren eine Baumzerlegung von U', indem wir an t einen Knoten mit Block $X \cup \{v\}$ anhängen. Dann erfüllt U' mit dieser Baumzerlegung und den A_i' anstelle der A_i für alle Komponenten von $G \setminus U'$, die aus C entstehen, (1) und (2), im Widerspruch zur Maximalität von U.
Falls $X_i = \emptyset$ für ein $i, 1 \leq i \leq k$, so sei $v \in C$ beliebig. Wir setzen $A_i' := \{v\}$ und $A_j' := A_j$ für $j \neq i$. Wieder erfüllt U' (1) und (2).
Also gilt $|X_i| = l$ für $1 \leq i \leq k$.

Weil G kein (k,l)-Gewirr enthält, gibt es $i,j, 1 \leq i < j \leq k$, so daß es keine Familie von l paarweise disjunkten Wege von X_i nach X_j gibt, deren innere Ecken alle in C liegen. Sei $\overline{C} := \langle C \cup X_i \cup X_j \rangle$. Nach dem Satz von Menger gibt es ein $Y \subseteq C \cup X_i \cup X_j$ mit $|Y| < l$, daß X_i von X_j in $\overline{C}$ trennt. Sei Y minimal mit dieser Eigenschaft. Dann gilt $Y \not\subseteq U$, denn C ist zusammenhängend und $|X_i| = |X_j| = l > |Y|$.
Sei $U' := U \cup Y$. Seien $t' \notin V^T$, $T' := (T \cup \{t'\}) + tt'$ und $B'_t := B_t$ für $t \in V^T$, $B_{t'} := X \cup Y$. Dann ist $(T', (B'_t)_{t \in V^{T'}})$ eine Baumzerlegung von U' der Weite höchstens $(k+1)l - 2$, denn $B_{t'} \leq kl + l - 1$. Sei C' eine Komponente von $G \setminus U'$. Falls $C' \cap C = \emptyset$, so ist C' auch Komponente von $G \setminus U$ und erfüllt (2) wie zuvor.
Nehmen wir also an, daß $C' \subseteq C$. Dann ist $X' := N(C') \subseteq B_{t'}$. Ferner ist C' auch eine Komponente von $\overline{C} \setminus Y$. OBdA sei C' in einer Komponente von $\overline{C} \setminus Y$, die X_i nicht schneidet. Dann gilt $X' \subseteq \bigcup_{j \neq i} X_j \cup Y$.
Wegen der Minimalität von Y gibt es in $X_i \cup (C \setminus C')$ eine Familie von m paarweise disjunkten Wegen von X_i nach Y. Sei A'_i die Vereinigung von A_i mit diesen Wegen und $A'_j := A_j$ für $j \neq i$. Dann sind die A'_j, für $1 \leq j \leq k$, zusammenhängend und paarweise disjunkt. Ferner gilt $X' \subseteq \bigcup_{j \neq i} X_j \cup Y \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} A'_j$.
Also erfüllt U' (1) und (2), im Widerspruch zur Maximalität von U. □

§23. Gewebe

(23.1) Lemma. Sei G ein bipartiter Graph mit Partition (X,Y).
Seien $k := |X|, l := |Y|$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq k, n \leq l$, so daß

$$||G|| \leq \frac{(k-m)(l-n)}{n}. \tag{1}$$

Dann existieren $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$ mit $|X'| = m$ und $|Y'| = n$, so daß $X' \cup Y'$ unabhängig in G ist (d.h. $E^G \cap \mathcal{P}_2(X' \cup Y') = \emptyset$).

Beweis: Wegen (1) gibt es weniger als $(l-n)$ Ecken $y \in Y$ mit $d^G(y) > \frac{(k-m)}{n}$. Sei $Y' \subseteq Y$ mit $|Y'| = n$ und $d^G(y) \leq \frac{(k-m)}{n}$ für alle $y \in Y'$.

Dann gilt $|N^G(Y')| \leq (k-m)$, es gibt also ein $X' \subseteq X$ mit $|X'| = m$ und $X' \cap N^G(Y') = \emptyset$. $\square$

Sei $W = v_1 e_1 \dots v_k$ ein Weg. Eine Zerlegung von W in Segmente ist eine Tupel $(W_1, \dots, W_n)$ von Teilwegen, für die es $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1} = k+1$ gibt, so daß für $1 \leq j \leq n$ gilt: $W_j = v_{i_j} e_{i_j} \dots v_{i_{j+1}-1}$.

(23.2) Definition. Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(1) Ein (m,n)-Prägewebe (in einem Graphen G) ist ein Paar $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ von Familien von paarweise disjunkten Wegen (in G) mit $|\mathcal{H}| = m$, $|\mathcal{V}| = n$ und $W \cap X \neq \emptyset$ für alle $W \in \mathcal{H}$, $X \in \mathcal{V}$.

(2) Ein (m,n)-Gewebe $(\mathcal{H}, \{X_1, \dots, X_n\})$ ist ein (m,n)-Prägewebe, wenn sich jeder Pfad $W \in \mathcal{H}$ in Segmente $(W_1, \dots, W_n)$ zerlegen läßt, so daß für $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$W \cap X_i \subseteq W_i.$$

(23.3) Lemma. Seien $n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n^2$ und $l \geq n^{8\binom{k}{2}(n+2)}$. Sei G ein Graph, der ein (k,l)-Gewirr enthält.

Dann gilt entweder $K_k \preceq G$, oder G enthält ein (n^2-1, n^{2n+2})-Gewebe in G.

Beweis: Sei $h := \binom{k}{2}$ und $\sigma : \mathcal{P}_2(\{1, \dots, k\}) \to \{1, \dots, h\}$ bijektiv. Im folgenden identifizieren wir das Paar $ij \in \mathcal{P}_2(\{1, \dots, k\})$ mit der Zahl $\sigma(ij) \in \{1, \dots, h\}$.
OBdA nehmen wir an, daß $l = n^{8h(n+2)}$. Wir setzen $m := n^{4(n+2)}$ und definieren $f : \{1, \dots, h\} \to \mathbb{N}$ und $g : \{1, \dots, h-1\} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(p) := \frac{l}{m^{2p}} = n^{8(n+2)(h-p)},$$
$$g(p) := \frac{f(p)}{m}.$$

Sei $(A_1, \dots, A_k, B)$ ein (k,l)-Gewirr in G. Für $q = ij \in \mathcal{P}_2(\{1 \dots, k\})$ sei $\mathcal{X}_q$ eine Familie von l paarweise disjunkten Wegen von A_i nach A_j.

Sei nun $p^* \in \{0, \dots, h\}$ maximal mit folgender Eigenschaft:
Für $1 \le p \le p^*$ und $q = ij \in \mathcal{P}_2(\{1 \dots, k\})$ existiert eine Familie $\mathcal{X}_q^p$ von paarweise disjunkten Wegen von A_i nach A_j, so daß die folgende Bedingungen gelten:

(1) Falls $q < p$, so ist $\mathcal{X}_q^p = \{X\}$ für einen Weg X, der disjunkt ist zu allen $Y \in \bigcup_{\substack{1 \le q' \le h \\ q \ne q'}} \mathcal{X}_{q'}^p$.

(2) Falls $q = p$, so gilt $|\mathcal{X}_q^p| = f(p)$.

(3) Falls $q > p$, so gilt $|\mathcal{X}_q^p| = g(p)$. Weiterhin gibt es für alle $e \in \bigcup_{X \in \mathcal{X}_q^p} E^X \setminus \bigcup_{X' \in \mathcal{X}_p^p} E^{X'}$ im Graphen $\bigcup \mathcal{X}_q^p \cup \bigcup \mathcal{X}_p^p - e$ keine $g(p)$ disjunkten Wege von A_i nach A_j.

Falls $p^* = h$, so gilt $K_k \preceq G$ und wir sind fertig. Wir können also annehmen, daß $p^* < h$.

Wir zeigen:

$$p^* \ge 1 \tag{A}$$

Um dies zu sehen, wählen wir zunächst ein beliebiges $\mathcal{X}_1^1 \subseteq \mathcal{X}_1$ mit $|\mathcal{X}_1^1| = f(1)$. Anschließend wählen für $q = ij > 1$ wir im Graphen $\bigcup \mathcal{X}_1^1 \cup \mathcal{X}_q$ eine Familie $\mathcal{X}_q^1$ von $g(1)$ paarweise disjunkten Wegen von A_i nach A_j, die die Bedingung (3) erfüllt.
Das zeigt (A).

Als nächstes zeigen wir:

Für alle $X \in \mathcal{X}_{p^*}^{p^*}$ gibt es ein $q > p^*$, so daß X zu weniger als $\frac{g(p^*)}{m}$ der Wege in $\mathcal{X}_q^{p^*}$ disjunkt ist. (B)

Denn angenommen, es gibt ein $X \in \mathcal{X}_{p^*}^{p^*}$, so daß für alle $q > p^*$ X zu mindestens $\frac{g(p^*)}{m} = f(p^*+1) \ge g(p^*+1)$ der Wege in $\mathcal{X}_q^{p^*}$ disjunkt ist. Dann wählen wir ein solches X und definieren Mengen $X_q^{p^*+1}$ für $1 \le q \le h$ wie folgt: Für $1 \le q < p^*$ setzen wir $\mathcal{X}_q^{p^*+1} := X_q^{p^*}$. Wir setzen $\mathcal{X}_{p^*}^{p^*+1} := \{X\}$ und wählen ein $\mathcal{X}_{p^*+1}^{p^*+1} \subseteq \mathcal{X}_{p^*+1}^{p^*}$ mit $|\mathcal{X}_{p^*+1}^{p^*+1}| = f(p^*+1)$, so daß X zu allen Wegen in $\mathcal{X}_{p^*+1}^{p^*+1}$ disjunkt ist. Für $p^*+1 < q \le h$ wählen wir ein geeignete Familie $\mathcal{X}_q^{p^*+1}$ von $g(p^*+1)$ paarweise disjunkten Wegen im Graphen $\bigcup \mathcal{X}_{p^*+1}^{p^*+1} \cup \mathcal{X}_q^{p^*}$, die alle zu X disjunkt sind, so daß (3) erfüllt ist.
$X_1^{p^*+1}, \dots, X_h^{p^*+1}$ erfüllen dann (1)-(3), im Widerspruch zur Maximalität von p^*. Das zeigt (B).

(B) impliziert, daß es ein $q, p^* < q \le h$ und ein $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}_{p^*}^{p^*}$ mit $|\mathcal{X}| = \frac{f(p^*)}{h}$ gibt, so daß alle $X \in \mathcal{X}$ zu weniger als $\frac{g(p^*)}{m}$ der Wege in $\mathcal{X}_q^{p^*}$ disjunkt sind.

Wir zeigen jetzt:

Es gibt $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}_q^{p^*}$ und $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$, so daß $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ ein $(n^2, \lceil \frac{f(p^*)}{2h} \rceil)$-Prägewebe ist. (C)

Um das zu sehen betrachten wir den bipartiten Graphen H mit Partition $(\mathcal{X}, \mathcal{X}_q^{p^*})$, in dem zwei Ecken (Wege in G) adjazent sind, wenn sie disjunkt sind.
Weil jeder Weg in $\mathcal{X}$ zu weniger als $\frac{g(p^*)}{m}$ Wegen in $\mathcal{X}_q^{p^*}$ disjunkt ist, gilt

$$\begin{aligned} \|H\| &\le |\mathcal{X}| \frac{g(p^*)}{m} \\ &\le \frac{\lfloor |\mathcal{X}|/2 \rfloor}{n^2} \cdot \frac{3g(p^*)}{n^{2(n+2)}} \\ &\le \frac{(|\mathcal{X}| - \lceil |\mathcal{X}|/2 \rceil)(g(p^*) - n^2)}{n^2}. \end{aligned}$$

Nach Lemma (23.1) gibt es damit ein $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ mit $|\mathcal{V}| \ge |\mathcal{X}|/2$ und ein $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}_q^{p^*}$ mit $|\mathcal{H}| = n^2$, so daß $\mathcal{H} \cup \mathcal{V}$ unabhängig in H ist. Das bedeutet aber gerade, daß $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ ein Prägewebe ist.
Damit ist (C) bewiesen.

Sei im folgenden $q = ij$ und $\mathcal{H} \subseteq X_q^{p^*}$, $\mathcal{V} \subseteq X_{p^*}^{p^*}$, so daß $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ ein $(n^2, \lceil \frac{f(p^*)}{2h} \rceil)$-Prägewebe ist.
Sei $r := \frac{\sqrt{m}}{k} = \frac{n^{2n+4}}{k} \ge n^{2n+2}$. Dann gilt $|\mathcal{V}| \ge r^2 g(p^*)$.
Sei $W_0 \in \mathcal{H}$ beliebig. Wir zerlegen W_0 so in Segmente $Y_1, \ldots, Y_r$, daß jedes der Y_i mindestens $rg(p^*)$ Pfade aus $\mathcal{V}$ schneidet, die kein $Y_{i'}$ mit $i' < i$ schneiden, und das die Kanten $e_1, \ldots, e_{r-1}$, die diese Segmente voneinander trennen, in $E^{W_0} \setminus \bigcup_{X \in \mathcal{X}_q^{p^*}} E^X$ liegen.
Dann gibt es wegen (3) für $1 \le s \le r-1$ ein T_s mit $|T_s| = g(p^*) - 1$, das im Graphen $(\bigcup \mathcal{X}_{p^*}^{p^*} \cup \bigcup \mathcal{X}_q^{p^*}) - e_s$ die Mengen A_i und A_j trennt.
Sei $T := \bigcup T_i$, dann gilt $|T| < rg(p^*)$. Also gibt es für $1 \le s \le r$ mindestens einen Weg $X_s \in \mathcal{V}$, so daß $X_s \cap T = \emptyset$ und $X_s \cap Y_s \ne \emptyset$.
Wir setzen $\mathcal{H}' := \mathcal{H} \setminus \{W_0\}$ und $\mathcal{V}' := \{Y_1, \ldots, Y_r\})$ und zeigen:

$(\mathcal{H}', \mathcal{V}')$ ist ein $(n^2 - 1, r)$-Gewebe. (D)

Für $1 \le s \le r-1$ enthält T_s genau eine Ecke von jedem der Wege in $\mathcal{H}'$.

Sei $W \in \mathcal{H}'$ und, für $1 \leq s \leq r-1$ sei $x_s \in V^{T_s} \cap V^W$. Ferner sei $x_0 \in A_i$ der Anfangs und $x_r \in A_j$ der Endpunkt von W. Dann trifft der Pfad Y_s W nur im Segment $x_{s-1} - x_s$, denn sonst würde T_{s-1} oder T_s nicht die richtige Trennungseigenschaft besitzen. $\square$

§24. Gitter

(24.1) Definition. Sei $n \geq 1$ und T ein Baum. Ein n-Tupel $(t_1, \ldots, t_n) \in (V^T)^n$ heißt gut, wenn $t_i \neq t_j$ für $1 \leq i < j \leq n$ und wenn für $1 \leq i \leq n-1$ der Weg $t_i T t_{i+1}$ keinen der Knoten t_j für $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, i+1\}$ enthält.

(24.2) Lemma. Sei $n \geq 1$. Jeder Baum der Ordnung mindestens $n(n-1)$ enthält ein gutes n-Tupel.

Beweis: Entweder, T hat mindestens n Blätter, und diese bilden in beliebiger Reihenfolge ein gutes Tupel.
Oder dies ist nicht der Fall. Dann wählen wir einen inneren Knoten r und betrachten alle Wege von r zu den Blättern. Weil es höchstens $(r-1)$ solche Wege gibt, enthält mindestens einer von ihnen r Knoten. Diese bilden in der Reihenfolge, in der sie auf dem Weg auftauchen, ein gutes Tupel. $\square$

(24.3) Lemma. Sei $n \geq 1$ und G ein Graph, der ein (n^2-1, n^{2n+2})-Gewebe enthält. Dann gilt $G_{n,n} \preceq G$.

Beweis: Seien $k := n^2 - 1$ und $l := n^{2n+2}$. Sei $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ ein (k,l)-Gewebe in G. Sei $\mathcal{H} = \{W_1, \ldots, W_k\}$ und $\mathcal{V} = \{X_1, \ldots, X_l\}$. Für $1 \leq i \leq k$ sei $W_{i1}, \ldots, W_{il}$ eine Aufteilung von W_i in Segmente, so daß $W_i \cap V_j \subseteq W_{ij}$ für $1 \leq j \leq l$. Sei G' der Minor von G, der durch Kontraktion der Segmente W_{ij} zu Ecken v_{ij} entsteht. Seien $W'_1, \ldots, W'_k$ die Wege in G', die aus $W_1, \ldots, W_k$ entstanden sind, und $X'_1, \ldots, X'_l$ die zusammenhängenden

Teilgraphen von G', die aus $X_1, \ldots, X_l$ entstanden sind. OBdA gelte dann $G' = \bigcup_{i=1}^k W_i' \cup \bigcup_{j=1}^l X_j'$ und

$$\begin{aligned} V^{W_i'} &= \{v_{i1}, \ldots, v_{il}\}, \\ V^{X_j'} &= \{v_{1j}, \ldots, v_{kj}\} \end{aligned}$$

für $1 \le i \le k, 1 \le j \le l$. Ist dies nämlich nicht der Fall, so können wir zu einem Minoren von G' mit dieser Eigenschaft übergehen.

Für $1 \le j \le l$ sei T_j ein spannender Baum von X_j'. Wegen Lemma (24.2) enthält jeder Baum T_j ein gutes Tupel $(v_{i_{j1}j}, \ldots, v_{i_{jn}j})$. Dann gibt es eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, l\}$ mit

$$|J| = n(n-1) \le n^2 = \frac{n^{2n+2}}{n^{2n}} \le \frac{l}{k^n},$$

so daß für alle $j, j' \in J$ gilt:

$$(i_{j1}, \ldots, i_{jn}) = (i_{j'1}, \ldots, i_{j'n}).$$

OBdA sei $J = \{1, \ldots, n^2\}$ und $(i_{j1}, \ldots, i_{jn}) = (1, \ldots, n)$ für $1 \le j \le n^2$. Für $1 \le i \le n-1$ und $1 \le j \le n^2$ sei $Y_j^i := v_{ij} T_j v_{(i+1)j}$. Sei

$$H' := \bigcup_{i=1}^n W_i' \cup \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i=1}^{n-1} Y^i_{(j-1)(n-1)+i}.$$

Sei H'' der Graph, der aus H' durch Kontraktion der Wegstücke

$$v_{i((j-1)(n-1)+1)} \ldots v_{i((j-1)(n-1)+n-1)}$$

(von W_i'), für $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, entsteht.
Ziehen wir in H'' noch die Wege Y_j^i zusammen, so erhalten wir ein $(n \times n)$-Gitter. □

<u>Beweis des Gittersatzes (21.1):</u> Für $n \ge 1$ setzen wir $k := n^2$, $l := n^{8\binom{k}{2}(n+2)}$ und $f(n) := (k+1)l - 1$.
Sei G ein Graph mit $bw(G) \ge f(n)$. Nach Lemma (22.2) enthält G ein (k, l)-Gewirr, nach Lemma (23.3) damit entweder einen K_k-Minor oder ein $(n^2 - 1, n^{2n+2})$-Gewebe. Im ersten Fall sind wir fertig, weil $G_{n,n}$ isomorph zu einem Subgraphen von K_k ist, im zweiten wegen Lemma (24.3). □

VII. Einbettbare Graphen

In diesem Kapitel beweisen wir (ohne Verwendung des Graphminorensatzes), daß für jede Fläche S die Klasse aller in S einbettbaren Graphen durch endlich viele verbotenen Minoren oder topologische Subgraphen charakterisierbar ist.
Der hier gegebene Beweis stammt von Thomassen (1997).

§25. Planare Graphen

(25.1) Proposition. Für jeden planaren Graphen G gibt es ein $n \geq 1$, so daß $G \preceq G_{n,n}$.

Beweis: Intuitiv liegt das darin, daß wir jeden Graphen in der Weise auf Millimeterpapier zeichnen können, wie das in Abbildung 13 angedeutet ist. Es ist mühselig, aber einfach,

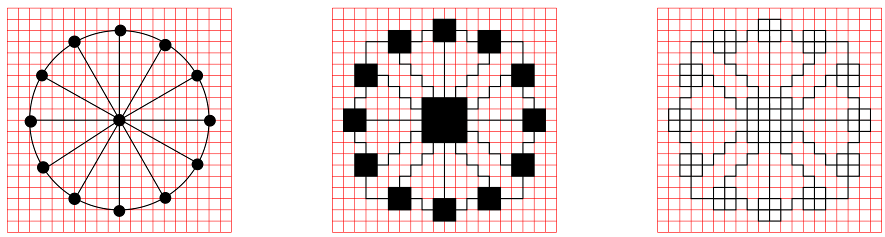

Abbildung 13:

basierend auf dieser Idee einen Beweis zu führen. □

(25.2) Korollar. Eine Klasse $\mathcal{C}$ von Graphen hat genau dann beschränkte Baumweite, wenn es einen planaren Graphen gibt, der Minor keines Graphen in $\mathcal{C}$ ist.

(25.3) Korollar. $\preceq$ ist eine WQO auf der Klasse der planaren Graphen.

Beweis: Sei $(G_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von planaren Graphen. Wähle $n \geq 1$ so, daß $G_1 \preceq G_{n,n}$. Falls ein $i \geq 1$ existiert, so daß $G_{n,n} \preceq G_i$, so ist auch $G_1 \preceq G_i$, und $(1,i)$ ist ein gutes Paar der Folge. Falls kein solches i existiert, so gilt $\mathrm{bw}(G_i) < f(n)$ mit dem f aus (21.1). Nach Satz (20.1) ist $\preceq$ WQO auf der Klasse aller Graphen der Baumweite kleiner $f(n)$, also besitzt die Folge$(G_i)_{i\geq 2}$ ein gutes Paar. $\square$

(25.4) Korollar. Sei $\mathcal{C}$ eine unter Minorenbildung abgeschlossene Klasse planarer Graphen. Dann ist $\mathcal{C}$ durch endlich viele verbotene Minoren charakterisiert, d.h. es gibt $H_1, \dots, H_n$, so daß

$$\mathcal{C} = \{G \mid \bigwedge_{i=1}^{n} H_i \not\preceq G\}.$$

§26. Flächen

Flächen sind hier kompakte, zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeiten, möglicherweise mit Rand. Für $g \geq 0, k \geq 1$ sei S_g die Fläche, die man erhält, indem man g Henkel an die 2-Sphäre S^2 klebt, und $S_{g,k}$ sei die Fläche, die aus S_g durch ausschneiden von k offenen Kreisscheiben entsteht. Für $h, k \geq 1$ sei N_h die Fläche, die man erhält, indem man h Kreuzkappen (oder Möbiusbänder) an die 2-Sphäre S^2 klebt, und $N_{h,k}$ sei die Fläche, die aus N_h durch ausschneiden von k offenen Kreisscheiben entsteht (vgl. Abb. 14) . Es ist dabei unerheblich, an welcher Stelle der Fläche man Henkel bzw. Kreuzkappen anklebt und an welcher Stelle man Kreisscheiben ausschneidet, die resultierenden Flächen sind homöomorph.
Im folgenden bedeute $S \cong S'$, daß S und S' homöomorph sind.

Abbildung 14:

(26.1) Klassifikation der Flächen. (1) Für jede orientierbare Fläche S existiert ein $g \geq 0$, so daß $S \cong S_g$.

(2) Für jede orientierbare Fläche S mit Rand existiert ein $g \geq 0$ und ein $k \geq 1$, so daß $S \cong S_{g,k}$.

(3) Für jede nicht orientierbare Fläche S existiert ein $h \geq 1$, so daß $S \cong N_h$.

(4) Für jede nicht orientierbare Fläche S mit Rand existiert ein $h \geq 1$ und ein $k \geq 1$, so daß $S \cong N_{h,k}$.

Für eine Fläche S mit Rand sei $\overline{S}$ die zugehörige Fläche ohne Rand, also $\overline{S} = S_g$ falls $S \cong S_{g,k}$ für $g \geq 0, k \geq 1$ und $\overline{S} = N_h$ falls $S \cong S_{h,k}$ für ein $h, k \geq 1$.

(26.2) Definition. Ein (2-dimensionale) Zellzerlegung eines topologischen Raumes T ist eine endliche Partition $\mathcal{Z}$ von T mit folgenden Eigenschaften:

- Jede Zelle $Z \in \mathcal{Z}$ ist entweder homoömorph zu $\mathbb{R}^2$ (einer offenen Kreisscheibe) oder homoömorph zu $\mathbb{R}$ (einem offenen Interval) oder homoömorph zu $\mathbb{R}^0$ (einelementig). Je nachdem nennen wir D ein Gebiet bzw. eine Kante bzw. eine Ecke.
- Der Rand ∂Z einer Zelle $Z \in \mathcal{Z}$ ist die Vereinigung von Zellen in $\mathcal{Z}$.

Ist $\mathcal{Z}$ eine Zellzerlegung, so bezeichnen wir mit $\mathcal{Z}_0$, $\mathcal{Z}_1$ bzw. $\mathcal{Z}_2$ die Mengen der Ecken, Kanten bzw. Gebiete von $\mathcal{Z}$.

Ein Zellzerlegung $\mathcal{Z}$ ist eine Triangulierung, wenn sie zusätzlich folgende Bedingungen erfüllt:

- Der Rand jedes Gebietes enthält genau drei Kanten.

— Der Rand jeder Kante enthält genau zwei Ecken.
— Die Ränder zweier Gebiete schneiden sich entweder in genau einer Kante und zwei Ecken oder in genau einer Ecke oder gar nicht.

(26.3) Satz. Jede Fläche besitzt eine Triangulierung.

(26.4) Lemma. (1) Ist S eine Fläche und sind $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$ Zellzerlegungen von S, so gilt

$$|\mathcal{Z}_0| - |\mathcal{Z}_1| + |\mathcal{Z}_2| = |\mathcal{Z}'_0| - |\mathcal{Z}'_1| + |\mathcal{Z}'_2|.$$

Die Zahl $\chi(S) := |\mathcal{Z}_0| - |\mathcal{Z}_1| + |\mathcal{Z}_2|$ bezeichnen wir als die Euler-Charakteristik von S.
Ist S' homöomorph zu S, so gilt $\chi(S) = \chi(S')$.
(2) Für $g, k \geq 0$ gilt $\chi(S_{g,k}) = 2 - 2g - k$.
(3) Für $h \geq 1, k \geq 0$ gilt $\chi(N_{h,k}) = 2 - h - k$.

Ein Kurve $\gamma \subseteq S$ auf einer Fläche S heißt stückweise linear, wenn es eine Triangulierung $\mathcal{Z}$ von S gibt, so daß γ die Vereingung von Kanten und Ecken von $\mathcal{Z}$ ist.

Im folgenden seien alle Kurven auf Flächen stückweise linear.

Wir erinnern uns, daß eine einfache Kurve ein homöomorphes Bild des offenen Intervals $(0, 1)$ ist und eine einfache geschlossene Kurve ein homöomorphes Bild der Sphäre S^1.

(26.5) Lemma. Sei γ eine einfache geschlossene Kurve auf einer Fläche S, die den Rand von S nicht schneidet. Dann gibt es eine abgeschlossene Umgebung U von γ in S, die den Rand von S nicht schneidet und die entweder homöomorph zu einem Zylinder $S_{0,2}$ oder homöomorph zu einem Möbiusband $N_{1,1}$ ist.

Wir nennen U eine abgeschlossene Schlauchumgebung von γ. Eine offene Schlauchumgebung von γ ist das Innere einer abgeschlossenen Schlauchumgebung.

Beweis: Wir finden eine Triangulierung von S, die lokal aussieht wie Abbildung 15. Die Charakteristik des grau

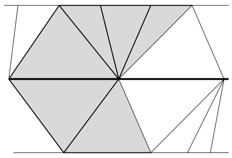

Abbildung 15:

eingefärbten Stückes ist 0, also ist auch die Charakteristik der ganzen Umgebung 0. Die einzigen Flächen der Charakteristik 0 mit nichtleerem Rand sind $S_{0,2}$ und $N_{1,1}$. □

(26.6) Lemma. Sei γ eine einfache geschlossene Kurve in einer Fläche S und U eine offene Schlauchumgebung von γ. Dann sind die Zusammenhangskomponenten von $S \setminus U$ Flächen mit Rand, und es tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

(1) U ist ein Zylinder, $S \setminus U$ hat zwei Zusammenhangskomponenten S', S'' mit je einem Randkreis, und es gilt $\chi(S) = \chi(S') + \chi(S'')$.
(2) U ist ein Zylinder, $S \setminus U$ hat eine Zusammenhangskomponente S' mit zwei Randkreisen, und es gilt $\chi(S) = \chi(S')$.
(3) U ist ein Möbiusband, $S \setminus U$ hat eine Zusammenhangskomponente S' mit einem Randkreis, und es gilt $\chi(S) = \chi(S')$.

Ferner ist $S \setminus U$ bis auf Homöomorphie unabhängig von der Schlauchumgebung U.

Tritt Fall (1) ein mit $S' \cong S_{0,1}$ oder $S'' \cong S_{0,1}$, so bezeichnen wir γ als zusammenziehbar.

Beweis: Wir verwenden wieder eine Triangulierung, die lokal aussieht wie Abbildung 15. Löschen wir das Innere der Schlauchumgebung, so ändert sich die Euler-Charakteristik nicht. □

Man beachte, daß eine einfache geschlossene Kurve γ in einer Fläche S genau dann zusammenziehbar ist, wenn $S \setminus \gamma$ genau zwei

Zusammenhangskomponenten hat, von denen eine homöomorph zu einer offenen Kreisscheibe ist.

(26.7) Korollar. Sei γ eine nicht zusammenziehbare einfache geschlossene Kurve in einer Fläche S und U eine Schlauchumgebung von γ.

Dann gilt für jede Zusammenhangskomponente S' von $S \setminus U$:

$$\chi(\overline{S}') > \chi(S).$$

Beweis: Folgt aus Lemma (26.6) und der Tatsache, daß für Flächen S' mit nichtleerem Rand $\chi(S') < \chi(\overline{S}')$. □

§27. Einbettungen von Graphen

Sei G ein Graph und S ein Fläche. Im folgenden ist eine Einbettung von G in S eine Abbildung Π, die jedem $v \in V^G$ einen Punkt $\Pi(v) \in S$ zuordnet und jeder Kante $e \in E^G$ eine einfache Kurve $\Pi(e) \subseteq S$, so daß

- Für $v, v' \in E^G$ mit $v \neq v'$ gilt $\Pi(v) \neq \Pi(v')$.
- Für $e, e' \in E^G$ mit $e \neq e'$ gilt $\Pi(e) \cap \Pi(e') = \emptyset$.
- Für $vw \in E^G$ gilt $\partial\Pi(vw) = \{\Pi(v), \Pi(w)\}$.

Wir setzen $V^\Pi := \Pi(V^G)$, $E^\Pi := \Pi(E^G)$ und $\Pi(G) := V^\Pi \cup \bigcup E^\Pi$. Die Zusammenhangskomponenten von $S \setminus \Pi(G)$ bezeichnen wir als die Gebiete von Π; die Menge aller Gebiete bezeichnen wir mit F^Π.
Es ist leicht zu sehen, daß ein Graph genau dann in eine Fläche S mit Rand einbettbar ist, wenn er in die Fläche $\overline{S}$ einbettbar ist.
Eine Einbettung Π ist eine Zelleinbettung, wenn alle Gebiete von Π homöomorph zu offenen Kreisscheiben sind. Ist dies der Fall, so ist $V^\Pi \cup E^\Pi \cup F^\Pi$ eine Zellzerlegung von S.

(27.1) Definition. Die Euler-Charakteristik eines Graphen G ist die Zahl

$$\chi(G) := \max\{\chi(S) \mid G \text{ einbettbar in } S\}.$$

Ein Einbettung Π eines Graphen G in eine Fläche S ist minimal, wenn $\chi(G) = \chi(S)$.

(27.2) Lemma. Sei Π eine Einbettung eines zusammenhängenden Graphen G in eine Fläche S, die keine Zelleinbettung ist. Dann gibt es eine Zelleinbettung Π' von G in eine Fläche S' mit $|F^{\Pi'}| \geq |F^{\Pi}|$ und $\chi(S') > \chi(S)$.

Beweis: Sei $f \in F^{\Pi}$ nicht homöomorph zu einer offenen Kreisscheibe. f ist homoömorph zum Inneren einer Fläche mit Rand; das folgt aus der Tatsache, daß wir f triangulieren können. Deshalb können wir für eine Zusammenhangskomponente von ∂f eine offene Umgebung $\mathcal{U}$ finden, so daß $\mathcal{U} \cap f$ homöomorph zu einem Zylinder ist. Dann ist auch $f' := f \setminus \mathcal{U}$ nicht zusammenziehbar.

Sei γ eine einfache geschlossene Kurve in $\mathcal{U}$, die in $\mathcal{U}$ nichtzusammenziehbar ist, und sei $\mathcal{U}'$ eine offenen Schlauchumgebung von γ, deren Abschluß ganz in $\mathcal{U}$ liegt. Π ist auch eine Einbettung des Graphen G in $S \setminus \mathcal{U}'$.

Fall 1: $S \setminus \mathcal{U}'$ hat zwei Zusammenhangskomponenten S' und S''. Dann liegt $\Pi(G)$ ganz in einer dieser Komponenten, sagen wir in S', und f' in der anderen. Weil S'' einen Randkreis hat und f' nicht homöomorph zu einer Kreisscheibe ist, gilt $\chi(S'') < \chi(S_{0,1}) \leq 1$. Also gilt

$$\chi(S') = \chi(S) - \chi(S'') \geq \chi(S)$$

und damit $\chi(\overline{S}') = \chi(S') + 1 > \chi(S)$.
Π induziert eine Einbettung von G in $\overline{S}'$ mit $|F^{\Pi'}| = |F^{\Pi}|$.

Fall 2: $S \setminus \mathcal{U}'$ hat eine Zusammenhangskomponente S'. Dann ist G auch in S' und damit in $\overline{S}'$ einbettbar. Die Zahl der Gebiete kann sich dabei höchstens erhöhen. □

(27.3) Korollar. Jede minimale Einbettung eines Graphen ist eine Zelleinbettung.

(27.4) Korollar. Für jede Einbettung Π eines zusammenhängenden Graphen G gilt

$$|G| - \|G\| + |F^{\Pi}| \leq \chi(G).$$

Beweis: Sei Π eine Einbettung von G in eine Fläche S und sei Π' eine Zelleinbettung von G in eine Fläche S' mit $|F^{\Pi'}| \geq |F^{\Pi}|$. Dann gilt

$$|G| - \|G\| + |F^{\Pi}| \leq |G| - \|G\| + |F^{\Pi'}| = \chi(S') \leq \chi(G).$$

□

(27.5) Lemma. Sei (G_1, G_2) eine Zerlegung eines zusammenhängenden Graphen G der Ordnung 1, und sei G_2 nicht planar. Dann gilt

$$\chi(G_1) > \chi(G).$$

Beweis: Nehmen wir an, daß $\chi(G_1) = \chi(G)$. Sei Π eine minimale Einbettung von G in eine Fläche S. Dann ist $\Pi_1 := \Pi|_{G_1}$ eine Zelleinbettung, denn sonst würde nach Lemma (27.2) eine Einbettung Π' von G_1 in eine Fläche S' mit $\chi(S') > \chi(S)$ existieren. Dann wäre $\chi(G_1) \geq \chi(S') > \chi(S) = \chi(G)$.

Sei $V^{G_1} \cap V^{G_2} = \{x\}$. G_2 enthält mindestens eine Zusammenhangskomponente H, die nicht planar ist. Sei $f \in F^{\Pi_1}$ mit $\Pi(H) \subseteq f \cup \{\Pi(x)\}$. Weil Π_1 eine Zelleinbettung ist, ist f homöomorph zu einer Kreisscheibe, also ist H planar - ein Widerspruch. □

(27.6) Lemma. Seien G_1, G_2 disjunkte zusammenhängende Graphen, und sei G_2 nicht planar. Seien $v, w \in V^{G_1}$, $e = xy \in E^{G_2}$, und sei

$$G = (G_1 \cup G_2) - e + xv + yw.$$

Dann gilt $\chi(G_1) > \chi(G)$.

Beweis: Ist $G_2 - e$ nicht zusammenhängend, so ist schon eine Zusammenhangskomponente H von $G_2 - e$ nicht planar. Sagen wir, $x \in H$, nach Lemma (27.5) gilt dann $\chi(G) \leq \chi(G_1 \cup H + xv) < \chi(G_1)$. Nehmen wir also an, daß $G_2 - e$ zusammenhängend ist.

Nehmen wir an, daß $\chi(G_1) = \chi(G)$. Sei Π eine minimale Einbettung von G in eine Fläche S. Dann ist $\Pi_1 := \Pi|_{G_1}$ eine Zelleinbettung, denn sonst würde nach Lemma (27.2) eine Einbettung Π' von G_1 in eine Fläche S' mit $\chi(S') > \chi(S)$ existieren. Dann wäre $\chi(G_1) \geq \chi(S') > \chi(S) = \chi(G)$.

Weil G_2 zusammenhängend ist, liegen v und w auf dem Rand eines Gebietes $f \in F^{\Pi_1}$. Weil f homöomorph zu einer Kreisscheibe ist und damit der Rand von f zusammenhängend, läßt sich die Einbettung Π zu einer Einbettung Π' von $G + e$ erweitern, in der die Kurve $\Pi'(e)$ entlang des Randes von f verläuft. Dann ist aber $\Pi'|_{G_2}$ eine planare Einbettung von G_2, ein Widerspruch. □

(27.7) Lemma. Seien $G_1, \ldots, G_n$ die Zusammenhangskomponenten eines Graphen G. Dann gilt

$$\chi(G) = \sum_{i=1}^{n} \chi(G_i) - 2(n-1).$$

Beweis: Wir zeigen die Behauptung induktiv über n. Für $n = 1$ ist sie trivial. Sei also $n \geq 2$ und gelte die Behauptung für $(n-1)$. Sei Π eine minimale Einbettung von G in eine Fläche S.

Wir zeigen als erstes:

Es gibt ein $i, 1 \leq i \leq n$ und ein Gebiet f von $\Pi|_{G_i}$, so daß $\Pi(G_j) \subseteq f$ für alle $j \neq i$. (A)

Wir zeigen (A) induktiv: Für $n = 2$ ist es klar. Für $n > 2$ sei $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ und f ein Gebiet von $\Pi|_{G_i}$, so daß $\Pi(G_j) \subseteq f$ für alle $j \in \{1, \ldots, n-1\} \setminus \{i\}$.
Falls $\Pi(G_n) \subseteq f$, so ist nichts zu tun. Nehmen wir also an, $\Pi(G_n) \not\subseteq f$. Dann gilt $f \cap \Pi(G_n) = \emptyset$. Weil $\partial f \subseteq \Pi(G_i)$, liegen $\Pi(G_i)$ und f im selben Gebiet g von $\Pi|_{G_n}$. Also gilt $\Pi(G_j) \subseteq g$ für $1 \leq j \leq n-1$. Das zeigt (A).

Es gibt ein $i, 1 \leq i \leq n$ und eine einfache geschlossene Kurve γ in S, die $\Pi(G)$ nicht schneidet und die $\Pi(G_i)$ von $\Pi(G \setminus G_i)$ trennt. (B)

Wir wählen i und f wie in (A). Wir wählen eine Umgebung U von ∂f in f, so daß $U \cap f \cap \Pi(G) = \emptyset$ und finden in $U \cap f$ darin eine geeignete Kurve. Das zeigt (B).

Wir wählen jetzt i und eine Kurve γ wie in (B). Sei $G' := G_i$ und $G'' := G \setminus G_i$. Sei U eine offene Schlauchumgebung von γ, die $\Pi(G)$ nicht schneidet und seien S', S'' die Zusammenhangskomponenten von $S \setminus U$, so daß $\Pi(G') \subseteq S'$, $\Pi(G'' \subseteq S'')$.
Dann gilt $\chi(G') = \chi(\overline{S}') = \chi(S') + 1$ und $\chi(G'') = \chi(\overline{S}'') = \chi(S'') + 1$, denn sonst wäre Π nicht minimal. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\chi(G'') = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \chi(G_i) - 2(n-2).$$

Wegen Lemma (26.6)(1) erhalten wir

$$\chi(G) = \chi(S) = \chi(S') + \chi(S'') = \chi(G') + \chi(G'') - 2 = \sum_{1 \leq j \leq n} \chi(G_i) - 2(n-1).$$

Das zeigt die Behauptung. $\square$

§28. Mauern

Seien $m, n \geq 1$. Die $\underline{(m,n)\text{-Mauer } M_{m,n}}$ ist der Graph mit

$$V^{M_{m,n}} := \big(\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, 2n\}\big) \setminus \begin{cases} \{(1,2n), (m,1)\} & \text{falls } m \text{ ungerade,} \\ \{(1,2n), (m,2m)\} & \text{falls } m \text{ gerade,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E^{M_{m,n}} := \big\{(i,j)(i',j') \;\big|\; & (i = i' \wedge j' = j+1) \\ & \vee (i \text{ ungerade} \wedge j \text{ ungerade} \wedge i' = i+1 \wedge j = j') \\ & \vee (i \text{ gerade} \wedge j \text{ gerade} \wedge i' = i+1 \wedge j = j')\big\} \end{aligned}$$

(vgl. Abb. 16).
Offensichtlich gilt für alle $m, n \geq 1$

$$G_{m,n} \preceq M_{m,n} \subseteq G_{2m,n}.$$

Aus dem Gittersatz (21.1), Lemma (5.4) under $\Delta(M_{m,n}) \leq 3$ für alle $m, n \geq 1$ folgt dann sofort:

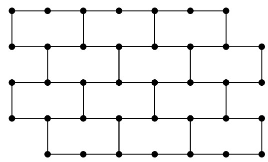

Abbildung 16: Die Mauer $M_{4,5}$

(28.1) Lemma. Für alle $n \geq 1$ gibt es ein $k \geq 1$, so daß jeder Graph der Baumweite größer als k einen Subgraphen enthält, der homöomorph zu $M_{n,n}$ ist.

§29. Eine Verallgemeinerung des Satzes von Kuratowski

(29.1) Satz (Robertson und Seymour 1990). Sei S ein Fläche. Dann gibt es Graphen $G_1, \ldots, G_m$, so daß ein Graph G genau dann in S einbettbar ist, wenn $G_i \not\preceq G$ für $1 \leq i \leq m$.

Der Beweis von Lemma (17.8) zeigt, daß daraus folgt:

(29.2) Korollar. Sei S ein Fläche. Dann gibt es Graphen $G_1, \ldots, G_m$, so daß ein Graph G genau dann in S einbettbar ist, wenn $G_i \not\subseteq_t G$ für $1 \leq i \leq m$.

Um den Satz zu beweisen, zeigen wir folgendes:

(29.3) Lemma. Sei $\chi \leq 2$. Dann gibt es ein $n := n(\chi) \geq 1$, so daß für jeden zusammenhängenden Graphen G mit $\chi(G) < \chi$ und $\chi(G - e) \geq \chi$ für alle $e \in E^G$ gilt:

$$M_{n,n} \not\subseteq_t G.$$

Beweis von Satz (29.1): Sei S eine Fläche, $\mathcal{C}$ die Klasse aller in S einbettbaren Graphen und $n := \max\{n(\chi) \mid 2 \geq \chi > \chi(S)\}$. Sei

$k \in \mathbb{N}$, so daß jeder Graph der Baumweite größer als k einen Subgraphen homöomorph zur Mauer $M_{n,n}$ enthält.
Sei

$$\mathcal{C} := \{G \mid G \text{ einbettbar in } S, M_{n,n} \not\preceq G\}.$$

$\mathcal{C}$ ist unter Minorenbildung abgeschlossen und enthält nur Graphen der Baumweite höchstens k. Nach Satz (20.1) und Lemma (17.4) gibt es Graphen $G_1, \ldots, G_m$, so daß für alle Graphen G gilt:

$$G \in \mathcal{C} \iff \bigwedge_{i=1}^{m} G_i \not\preceq G. \tag{A}$$

Wir zeigen jetzt:

$$\text{Es gibt ein } i, 1 \leq i \leq m, \text{ so daß } M_{n,n} \cong G_i. \tag{B}$$

Denn nehmen wir an, daß $M_{n,n} \ncong G_i$ für $1 \leq i \leq n$. Weil $M_{n,n} \notin \mathcal{C}$, gibt es ein $i, 1 \leq i \leq m-1$ mit $G_i \preceq M_{n,n}$ und damit $M_{n,n} \not\preceq G_i$. Weil $M_{n,n}$ aber planar ist, folgt $G_i \in \mathcal{C}$, ein Widerspruch. Das zeigt (B).

Im folgenden nehmen wir OBdA an, daß $G_m = M_{n,n}$ und $M_{n,n} \not\preceq G_j$ für $1 \leq j \leq m-1$. Wir zeigen für alle Graphen G:

$$G \text{ einbettbar in } S \iff \bigwedge_{i=1}^{m-1} G_i \not\preceq G. \tag{C}$$

Sei zunächst G einbettbar in S. Nehmen wir an, $G_i \preceq G$ für ein $i, 1, \leq i \leq m-1$. Dann ist auch G_i einbettbar in S. Weil $M_{n,n} \not\preceq G_i$ gilt damit $G_i \in \mathcal{C}$, ein Widerspruch.
Sei nun G nicht einbettbar in S. Sei $H \subseteq G$ so gewählt, daß $\chi(H) < \chi(S)$, aber $\chi(H - e) \geq \chi(S)$ für alle $e \in E^H$. Weil $H \notin \mathcal{C}$, existiert ein $i, 1 \leq i \leq m$, so daß $G_i \preceq H$.
Wenn $G_m = M_{n,n} \preceq H$, so gibt es eine Zusammenhangskomponente K von H, so daß $M_{n,n} \preceq K$. Wegen Lemma (27.5) gilt dann auch $\chi(K - e) > \chi(K)$ für alle $e \in E^K$. Wegen unserer Wahl von n gilt dann aber wegen Lemma (29.3) $M_{n,n} \not\preceq K$. Widerspruch.
Also gilt $G_i \preceq H$ für ein $i < m$. □

Sei $H \cong_t M_{m,n}$. Der <u>Rand</u> von H ist der Kreis $\partial H \subseteq H$, der dem äußeren Kreis der Mauer $M_{m,n}$ entspricht (vgl. Abb. 17(a)). Ein

Ziegel von H ist ein Kreis in H, der einem der „Bausteine" der Mauer entspricht (vgl. Abb. 17(b)).

(a) (b)

Abbildung 17: Rand und Ziegel einer Mauer

Sei nun $H \subseteq G$. Ein Anhang von H (in G) ist ein Subgraph von G, der entweder nur aus einer einzigen Kante mit beiden Endpunkten in H und mindestens einem Endpunkt in $H \setminus \partial H$ besteht, oder von der Gestalt $\langle C \cup N(C) \rangle^G$ für eine Zusammenhangskomponente C von $G \setminus H$ mit $N(C) \setminus \partial H \neq \emptyset$ ist. Wir sagen, daß H flach in G liegt, wenn der Graph

$$H^* := H \cup \bigcup_{A \text{ Anhang von } H} A.$$

planar ist.

(29.4) Lemma. Sei $n \geq 1$ und G ein Graph. Ferner sei $H \subseteq G$ mit $M_{n,n} \cong_t H$, so daß H flach in G liegt.

Dann gibt es für jeden Anhang A von H einen Ziegel Z von H, so daß $A \cap H \subseteq Z$.

Beweis: Für $n \leq 2$ gibt es keine Anhänge, und für $n \geq 3$ zeigt Abb. 18 wie ein Anhang (hier nur aus einer Kante bestehend), für den die Behauptung nicht erfüllt ist, einen $K_{3,3}$-Minor erzwingt. $\square$

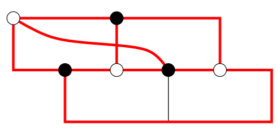

Abbildung 18:

(29.5) Lemma. Für alle $m \geq 1$ und $\chi \leq 2$ gibt es ein n, so daß folgendes gilt:

Ist G ein Graph mit $\chi(G) = \chi$ und $H \subseteq G$, so daß $H \cong_t M_{n,n}$, dann gibt es ein $K \subseteq H$, so daß $K \cong_t M_{m,m}$ und K liegt flach in G.

Beweis: Sei $l := 2(4-\chi)$. Wir wählen n so groß, daß für jeden Graphen $H \cong_t M_{n,n}$ gilt:

Es gibt paarweise disjunkte Teilgraphen $H_1, \ldots, H_l \subseteq H$, so daß $H_i \cong_t M_{m,m}$ für $1 \leq i \leq l$ und daß für $1 \leq i < j \leq l$ und $x \in \partial H_i \setminus \partial H$, $y \in \partial H_j \setminus \partial H$ ein Weg von x nach y in H existiert, dessen Inneres $\bigcup_{k=1}^{l} H_k$ nicht schneidet. (A)

Sei nun G ein Graph mit $\chi(G) \geq \chi$ und $H \subseteq G$ mit $H \cong_t M_{m,m}$. Seien $H_1, \ldots, H_l \subseteq H$ gemäß (A) gewählt. Wir zeigen, daß mindestens einer der Graphen H_i flach in G liegt.
Nehmen wir an, daß dies nicht der Fall ist. Wir konstruieren induktiv eine Folge $H_1 := K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_{l/2} \subseteq G$ von zusammenhängenden Teilgraphen mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für $1 \leq i \leq l/2$ schneidet K_i höchstens $2i$ der Graphen $H_1, \ldots, H_l$.

(2) $\chi(K_i) \leq 2 - (i-1)$.

Das führt aber zu einem Widerspruch, denn aus (2) erhalten wir

$$\chi = \chi(G) \leq \chi(K_{l/2}) \leq 2 - (4 - \chi - 1) = \chi - 1.$$

Nehmen wir nun an, $K_1, \ldots, K_i$ sind schon konstruiert (für ein $i, 1 \leq i < l/2$), so daß (1) und (2) erfüllt sind. Wegen (1) gibt es dann ein $j, 1 \leq j \leq l$, so daß $K_i \cap H_j = \emptyset$.

Fall 1: Kein Anhang von H_j enthält ein Ecke von $H \setminus H_j$.
Dann gilt $H_j^* \cap K_i = \emptyset$ (weil K_i zusammenhängend ist und eine Ecke von $H \setminus H_j$ enthält). Sei X ein Weg von K_i nach H_j in H, der kein $H_k \not\subseteq K_i$ für $k \neq j$ schneidet, ein solcher Weg existiert wegen (A). Wir setzen $K_{i+1} := K_i \cup H_j^* \cup X$. Weil H_j^* nicht planar ist, gilt dann wegen Lemma (27.5) $\chi(K_{i+1}) < \chi(K_i)$.

Fall 1: Fall 1 tritt nicht ein.
Dann gibt es einen Weg W von einer Ecke $x \in V^{H \setminus \partial H_i}$ zu einer Ecke $y \in V^{H \setminus H_i}$, dessen innere Ecken alle in $G \setminus H$ liegen. Von y

aus läßt sich W wegen (A) zu einem Weg W' von x zu einer Ecke $z \in \partial H_j$, die nicht im gleichen Ziegel wie x liegt, verlängeren, der höchstens einen der Graphen in

$$\{K_i\} \cup \{H_k \mid k \neq j, H_k \cap K_i = \emptyset\}$$

schneidet. Dann ist wegen Lemma (29.4) der Graph $H_j \cup W$ nicht planar. Falls $(H_j \cup W) \cap K_i = \emptyset$, so verfahren wir wie in Fall 1. Ansonsten setzen wir $K_{i+1} := (H_j \cup W) \cup K_i$. Falls $|(H_j \cup W) \cap K_i| = 1$, so gilt $\chi(K_{i+1}) < \chi(K_i)$ wegen Lemma (27.5). Falls $|(H_j \cup W) \cap K_i| \geq 2$, so gilt $\chi(K_{i+1}) < \chi(K_i)$ wegen Lemma (27.6). □

Beweis von Lemma (29.3): Sei $l := 3 - \chi$ und $m := 2l + 5$. Dann können wir in $M_{m,m}$ wie in Abb. 19 eine Kante e_0 und disjunkte konzentrische Kreise $C_1, \ldots, C_l$ wählen, die $\partial M_{m,m}$ nicht schneiden.

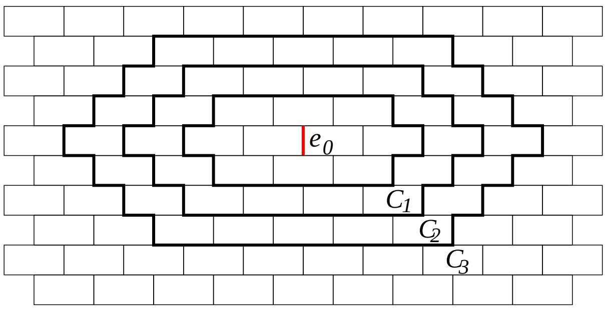

Abbildung 19: Die Kante e_0 und die Kreise C_1, C_2, C_3 in $M_{11,11}$

Wir wählen n so groß, daß jeder Graph G mit $\chi(G) \geq \chi - 2$ und $M_{n,n} \subseteq_t G$ einen Subgraphen $H \subseteq G$ mit $M_{m,m} \cong_t H$ enthält, der flach in G liegt.

Sei jetzt G ein zusammenhängender Graph mit $\chi(G) < \chi$ und $\chi(G - e) \geq \chi$ für alle $e \in E^G$ mit $M_{n,n} \subseteq_t G$. Dann gilt $\chi(G) \geq \chi - 2$. Liege $H \subseteq G$ mit $M_{m,m} \cong_t H$ flach in G.
Wir wählen eine Kante $e_0 \in E^H$ (bzw. einen Weg) und Kreise $C_1, \ldots, C_l$ wie in Abb. 19.
Sei $G' := G - e_0$ und Π eine Einbettung von G' in eine Fläche S mit $\chi(S) \geq \chi$. Für $1 \leq i \leq l$ sei I_i die Komponente von $G \setminus C_i$, die das „Innere" von $H \setminus C_i$ enthält und X_i die Komponente, die das

„Äußere" enthält. Weil H flach in G liegt, gilt $I_i \cap X_i = \emptyset$ (wegen Lemma (29.4)). Außerdem gilt

$$V^G = X_i \cup I_i \cup V^{C_i} \cup \{A \mid A \text{ Anhang von } H \text{ mit } N^G(A) \subseteq V^{C_i}\}.$$

Sei U_i eine offene Schlauchumgebung von $\Pi(C_i)$ mit $U_i \cap \Pi(G \setminus C_i) = \emptyset$.
Sei $S_0 := S$. Für $1 \leq i \leq l$ sei S_i' die Zusammenhangskomponente von $S_{i-1} \setminus U_i$, die $\Pi(\langle X_i \rangle)$ enthält, und $S_i := \overline{S}_i$. Dann gilt $\chi(S) \leq \chi(S_1) \ldots \leq \chi(S_l)$. Es gibt mindestens ein $i, 1 \leq i \leq l$, so daß $\Pi(C_i)$ in S_{i-1} zusammenziehbar ist, denn sonst wäre nach Korollar (26.7)

$$\chi(S_l) \geq \chi(S) + l = \chi + 3 - \chi = 3,$$

ein Widerspruch. Sei im folgenden i so gewählt, daß $\Pi(C_i)$ in S_{i-1} zusammenziehbar ist.

Wir zeigen, daß G bereits in S_{i-1} einbettbar ist. Das führt wegen

$$\chi(G) < \chi(G - e_0) = \chi(S) \leq \chi(S_{i-1})$$

zum Widerspruch.
Man beachte zunächst, daß Π eine Einbettung Π_i von $\langle X_i \cup V^{C_i} \rangle^G$ in S_{i-1} induziert, bei der C_i ein Gebiet g berandet, das homöomorph zu einer Kreisscheibe ist.
Wir erinnern uns, daß H^* den Graphen H zusammen mit seinen Anhängen bezeichnet und daß dieser planar ist. Sei Π^* eine Einbettung von H^* in die Sphäre S^2. Es ist leicht zu sehen, daß dann $\Pi^*(H^* \cap \langle X_i \rangle)$ und $\Pi^*(\langle I_i \rangle)$ (man beachte, daß $\langle I_i \rangle \cap H^* = \langle I_i \rangle$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten f^* bzw. g^* von $S^2 \setminus \Pi^*(C_i)$ liegen. Weil $g \cup \Pi_i(C_i)$ und $g^* \cup \Pi^*(C_i)$ homöomorph sind, können wir die Einbettung Π_i auf

$$\left\langle X_i \cup V^{C_i} \cup I_i \cup \bigcup \{A \mid A \text{ Anhang von } H \text{ mit } \Pi^*(A) \subseteq g^* \cup \Pi(C_i)\} \right\rangle$$

fortsetzen.
Um die Einbettung auf ganz G fortzusetzen, müssen wir noch die Anhänge A von H mit $\Pi^*(A) \cap g = \emptyset$ und $N^G(A) \subseteq V^{C_i}$ betrachten. Es ist aber leicht zu sehen, daß sich unsere Einbettung so erweitern läßt, daß diese in U_i eingebettet werden. □

Literaturverzeichnis

[1] N. Alon, P. Seymour, and R. Thomas. A separator theorem for nonplanar graphs. Journal of the American Mathematical Society, 3:801-808, 1990.

[2] B. Bollobás. Graph Theory. Springer-Verlag, 1979.

[3] B. Bollobás and A. Thomason. Proof of a conjecture of Mader, Erdoes and Hajnal on topological complete subgraphs. European Journal of Combinatorics, 19:883-887, 1998.

[4] R. Diestel. Graph Theory. Springer-Verlag, 1997.

[5] R. Diestel, T.R. Jensen, K.Y. Gorbunov, and C. Thomassen. Highly connected sets and the excluded grid theorem. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 75:61-73, 1999.

[6] G. Higman. Ordering by divisibility in abstract algebras. Proceedings of the London Mathematical Society, 2:326-336, 1952.

[7] J. Komlos and E. Szemeredi. Topological cliques in graphs. Comb. Probab. Comput., 3:247-256, 1994.

[8] A.V. Kostochka. Lower bound on the Hadwiger number of graphs by their average degree. Combinatorica, 4:307-316, 1984.

[9] J.A. Kruskal. Well-quasi ordering, the tree theorem, and Vászonyi's conjecture. Transactions of the American Mathematical Society, 95:210-225, 1960.

[10] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. Fundamenta Mathematicae, 15:271-283, 1930.

[11] W. Mader. Homomorphieeigenschaften und mittlere Kantendichte von Graphen. Mathematische Annalen, 174:265-268, 1967.

[12] W. Mader. Homomorphiesätze für Graphen. Mathematische Annalen, 178:154-168, 1968.

[13] B. Reed. Tree width and tangles: A new connectivity measure and some applications. In R.A. Bailey, editor, Surveys in Combinatorics, volume 241 of LMS Lecture Note Series, pages 87-162. Cambridge University Press, 1997.

[14] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors I. Excluding a forest. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 35:39-61, 1983.

[15] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors III. Planar tree-width. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 36:49-64, 1984.

[16] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors II. Algorithmic aspects of tree-width. Journal of Algorithms, 7:309-322, 1986.

[17] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors V. Excluding a planar graph. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 41:92-114, 1986.

[18] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors VI. Disjoint paths across a disc. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 41:115-138, 1986.

[19] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors VII. Disjoint paths on a surface. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 45:212-254, 1988.

[20] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors IV. Tree-width and well-quasi-ordering. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 48:227-254, 1990.

[21] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors IX. Disjoint crossed paths. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 49:40-77, 1990.

[22] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors VIII. A kuratowski theorem for general surfaces. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 48:255-288, 1990.

[23] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors X. Obstructions to tree-decomposition. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 52:153-190, 1991.

[24] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors XI. Circuits on a surface. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 60:72-106, 1994.

[25] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors XII. Distance on a surface. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 64:240-272, 1995.

[26] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors XIII. The disjoint paths problem. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 63:65-110, 1995.

[27] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors XIV. Extending an embedding. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 65:23-50, 1995.

[28] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors XV. Giant steps. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 68:112-148, 1996.

[29] N. Robertson and P.D. Seymour. Graph minors XVII. Taming a vortex. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 77:162-210, 1999.

[30] N. Robertson, P.D. Seymour, and R. Thomas. Hadwiger's conjecture for K_6-free graphs. Combinatorica, 13:279-361, 1993.

[31] P.D. Seymour and R. Thomas. Graph searching and a min-max theorem for tree-width. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 58:22-33, 1993.

[32] S.G. Simpson. Nonprovability of certain combinatorial properties of finite trees. In L.A. Harrington, M.D. Morley, A. Scedrov, and S.G. Simpson, editors, Harvey Friedman's Research on the Foundations of Mathematics, pages 87-118. Elsevier, 1985.

[33] J. Stillwell. Classical Topology and Combinatorial Group Theory. Springer-Verlag, 1990.

[34] R. Thomas. A Menger-like property of tree-width: The finite case. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 48:67-76, 1990.

[35] R. Thomas. Recent excluded minor theorems. In J.D. Lamb and D.A. Preece, editors, Surveys in Combinatorics, LMS Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1999.

[36] C. Thomassen. Kuratowski's theorem. Journal of Graph Theory, 5:225-241, 1981.

[37] C. Thomassen. Embeddings and minors. In R. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, editors, Handbook of Combinatorics, volume 1, chapter 5, pages 301-349. Elsevier, 1995.

[38] C. Thomassen. A simpler proof of the excluded minor theorem for higher surfaces. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 70:306-311, 1997.

[39] K. Wagner. Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. Mathematische Annalen, 114:570-590, 1937.

[40] K. Wagner. Beweis einer Abschwächung der Hadwiger-Vermutung. Mathematische Annalen, 153:139-141, 1964.