2.11 Bemerkungen.

(a) Man beachte, dass $\Sigma^1_1 = \text{ESO}$, und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{FO} \subseteq \Sigma_k \subseteq \Pi_{k+1} \subseteq \Sigma_{k+2} \subseteq \text{SO}.$$

(b) Σ^1_k-Formeln sind von der Gestalt

$$\exists \vec{Y}_1 \, \forall \vec{Y}_2 \cdots Q \, \vec{Y}_k \, \varphi,$$

wobei φ eine FO-Formel, jedes $\vec{Y}_i$ ein Tupel von Relationsvariablen und

$$Q = \begin{cases} \forall\,, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \exists\,, & \text{falls } k \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Die einzelnen Tupel $\vec{Y}_i$ heißen (existentielle bzw. universelle) *Quantorenblöcke*.

(c) Man kann leicht sehen, dass es für jede SO-Formel Φ eine Zahl k und eine Formel $\Psi \in \Sigma^1_k$ gibt, so dass Ψ äquivalent zu Φ ist.
Somit ist jede SO-Formel äquivalent zu einer Formel in $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma^1_k$.

Aus dem Satz von Fagin erhält man leicht die folgende Charakterisierung der Polynomialzeit-Hierarchie:

2.12 Korollar.

(a) Für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gilt: Σ^1_k beschreibt Σ^p_k auf Fin.

D.h. ein Problem gehört genau dann zur k-ten Stufe Σ^p_k der Polynomialzeit-Hierarchie, wenn es durch einen Σ^1_k-Satz beschrieben werden kann.

(b) Für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gilt: Π^1_k beschreibt Π^p_k auf Fin.

(c) SO *beschreibt* PH *auf* Fin.

Beweis: *Übung.* □

2.2 Fixpunktlogiken zur Beschreibung von P und PSPACE

Satz von Fagin: Beschreibung von NP durch existentielle Logik zweiter Stufe (ESO).
Ziel dieses Abschnitts: Logiken zur Beschreibung von P und PSPACE
Möglichkeiten:

- P durch geeignete Fragmente von SO beschreiben
  etwa: SO-HORN, Σ^1_1-HORN (Grädel, 1991)
- Fixpunktlogiken: Erweiterungen von FO um die Möglichkeit, Relationen *induktiv* (bzw. rekursiv) zu definieren

Um Fixpunktlogiken einführen und verstehen zu können, benötigen wir zunächst einige grundlegende Begriffe.

2.2.1 Etwas Fixpunkttheorie

Wir schreiben $\mathrm{Pot}(A)$, um die Potenzmenge einer Menge A zu bezeichnen, d.h.

$$\mathrm{Pot}(A) \;=\; \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Insbesondere gilt natürlich für jedes *endliche* A, dass $|\mathrm{Pot}(A)| \;=\; 2^{|A|}$.

2.13 Definition. Sei A eine Menge und $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ eine Abbildung.

(a) F heißt *monoton*, falls für alle Mengen $P, Q \in \mathrm{Pot}(A)$ gilt:

$$P \subseteq Q \quad\Longrightarrow\quad F(P) \subseteq F(Q).$$

(b) F heißt *inflationär*, falls für alle $P \in \mathrm{Pot}(A)$ gilt: $P \subseteq F(P)$.

(c) Eine Menge $P \in \mathrm{Pot}(A)$ heißt *Fixpunkt* von F, falls $F(P) = P$.

(d) Eine Menge $P \in \mathrm{Pot}(A)$ heißt *kleinster Fixpunkt* von F, falls P ein Fixpunkt von F ist und für jeden Fixpunkt Q von F gilt: $P \subseteq Q$.

2.14 Proposition.

(a) Es gibt Abbildungen, die weder monoton noch inflationär sind.

(b) Es gibt Abbildungen, die monoton, aber nicht inflationär sind.

(c) Es gibt Abbildungen, die inflationär, aber nicht monoton sind.

(d) Es gibt Abbildungen, die keinen Fixpunkt besitzen.

(e) Für jede Abbildung $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ gilt:
Falls es einen kleinsten Fixpunkt von F gibt, so ist dieser eindeutig bestimmt.

Beweis: *Übung.* □

Der folgende Satz charakterisiert die kleinsten Fixpunkte *monotoner* Abbildungen:

2.15 Satz (Knaster und Tarski).
Sei A eine Menge und $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ eine monotone Abbildung.
Dann hat F einen kleinsten Fixpunkt, der $\mathbf{lfp}(F)$ genannt wird, und es gilt:[3]

$$\mathbf{lfp}(F) \;=\; \bigcap\{X \subseteq A \mid F(X) = X\} \;=\; \bigcap\{X \subseteq A \mid F(X) \subseteq X\}.$$

[3] Für eine Menge M, deren Elemente selbst Mengen sind, schreiben wir $\bigcap M$, um die Schnittmenge $\bigcap_{X \in M} X$ zu bezeichnen.

Beweis: Sei

$$M \;:=\; \{X \subseteq A \mid F(X) \subseteq X\} \qquad \text{und} \qquad P \;:=\; \bigcap M.$$

Schritt 1: *Wir zeigen zunächst, dass P ein Fixpunkt von F ist:*

"$\underline{F(P) \subseteq P}$": Da $P = \bigcap M$, gilt für jedes $X \in M$, dass $P \subseteq X$. Da F monoton ist, folgt $F(P) \subseteq F(X)$. Wegen $X \in M$ gilt $F(X) \subseteq X$. Somit gilt für alle $X \in M$, dass $F(P) \subseteq X$. Daher gilt also:

$$F(P) \;\subseteq\; \bigcap M \;\stackrel{\text{def}}{=}\; P.$$

"$\underline{P \subseteq F(P)}$": Da (wie wir gerade gezeigt haben) $F(P) \subseteq P$ ist, folgt aus der Monotonie von F, dass auch $F\big(F(P)\big) \subseteq F(P)$. Somit gilt $F(P) \in M$. Wegen $P = \bigcap M$ folgt daher $P \subseteq F(P)$.

Schritt 2: *Für jeden Fixpunkt Q von F gilt $P \subseteq Q$, denn:*

Für jeden Fixpunkt Q von F gilt $F(Q) \subseteq Q$. Daher ist $Q \in M$, und gemäß Definition von P daher $P \subseteq Q$.

Schritt 3: *Abschluss des Beweises:*

Aus den Schritten 1 und 2 folgt, dass P der kleinste Fixpunkt von F ist.
Außerdem gilt für die Menge

$$M' \;:=\; \{X \subseteq A \mid F(X) = X\},$$

dass $P \in M'$ (da $F(P) = P$) und $M' \subseteq M$. Somit folgt

$$P \underset{\text{(Def.)}}{=} \bigcap M \underset{(M \supseteq M')}{\subseteq} \bigcap M' \underset{(P \in M')}{\subseteq} P.$$

Daher gilt für $\mathbf{lfp}(F) := P$, dass

$$\mathbf{lfp}(F) \;=\; \bigcap\{X \subseteq A \mid F(X) = X\} \;=\; \bigcap\{X \subseteq A \mid F(X) \subseteq X\}$$

der kleinste Fixpunkt von F ist. □

Eine andere Charakterisierung der kleinsten Fixpunkte monotoner Funktionen, die auch gleich ein Verfahren zum *Ausrechnen* des kleinsten Fixpunkts liefert, ergibt sich durch die Betrachtung der einzelnen *Induktionsstufen*:

2.16 Definition (Induktionsstufen).
Sei A eine *endliche* Menge und $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ eine Abbildung.

(a) Wir definieren induktiv eine Sequenz von Mengen $R^0, R^1, R^2, \ldots$ durch

$$R^0 := \varnothing \qquad \text{und} \qquad R^{i+1} := F\big(R^i\big) \qquad (\text{für alle } i \in \mathbb{N}).$$

Die Menge R^i heißt *i-te Induktionsstufe* (oder auch: i-te Stufe).
(Es gilt also für alle $i \in \mathbb{N}$: $R^i = F^i(\varnothing)$.)

(b) F heißt *induktiv*, falls für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $R^i \subseteq R^{i+1}$.

2.17 Proposition.

(a) Jede monotone oder inflationäre Abbildung ist induktiv.

(b) Es gibt Abbildungen, die induktiv, aber weder monoton noch inflationär sind.

Beweis: *Übung.* □

2.18 Proposition. *Für jede endliche Menge A und jede induktive Abbildung $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ wird die Sequenz der Induktionsstufen stationär, d.h. es gibt eine Zahl $i \leqslant |A|$, so dass $R^i = R^{i+1} \overset{def}{=} F(R^i)$, und somit $R^i = R^{i+n}$ für alle $n \geqslant 0$.*

Beweis: Da F induktiv ist, gilt

$$\varnothing = R^0 \subseteq R^1 \subseteq R^2 \subseteq \cdots \subseteq R^j \subseteq R^{j+1} \subseteq \cdots \subseteq A.$$

Da A nur $|A|$ viele Elemente besitzt, kann *nicht* für alle $j \in \{0, 1, .., |A|\}$ gelten, dass $R^j \subsetneqq R^{j+1}$ (denn sonst würde in jeder der Stufen $1, 2, .., |A|, |A|+1$ mindestens ein neues Element hinzukommen, in A gibt es aber nur $|A|$ viele Elemente).
Somit muss es also ein $i \in \{0, 1, .., |A|\}$ geben, so dass $R^i = R^{i+1}$. Gemäß der Definition der Stufen ($R^{j+1} := F(R^j)$) folgt daraus, dass

$$R^i = F(R^i) = F(F(R^i)) = F(F(F(R^i))) = \cdots,$$

also

$$R^i = R^{i+1} = R^{i+2} = R^{i+3} = \cdots.$$

□

2.19 Definition. Sei A eine endliche Menge und $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ induktiv.

(a) Die kleinste Zahl i, für die $R^i = R^{i+1}$ (d.h. $F^i(\varnothing) = F^{i+1}(\varnothing) = F^{i+n}(\varnothing)$, für alle $n \geqslant 0$), heißt das *Abschlussordinal* von F, oder kurz: $\mathrm{cl}(F)$.

(b) Die Menge $R^\infty := R^{\mathrm{cl}(F)}$ heißt *induktiver Fixpunkt* von F.

2.20 Satz. *Sei A eine endliche Menge.*
Für jede monotone Abbildung $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ gilt:

$$\mathbf{lfp}(F) \ = \ R^\infty.$$

D.h.: Der induktive Fixpunkt einer monotonen Abbildung ist gerade der kleinste Fixpunkt.

Beweis: "$\subseteq$": Gemäß der Definition des inflationären Fixpunkts gilt $R^\infty = F(R^\infty)$, R^∞ ist also ein Fixpunkt von F. Insbesondere gilt

$$\mathbf{lfp}(F) \subseteq R^\infty,$$

da der kleinste Fixpunkt gemäß Definition in jedem anderen Fixpunkt enthalten ist.
"$\supseteq$": Per Induktion zeigen wir, dass $R^i \subseteq \mathbf{lfp}(F)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
$i = 0$: Klar, da $R^0 = \varnothing \subseteq \mathbf{lfp}(F)$.
$i \to i{+}1$: Per Induktion gilt $R^i \subseteq \mathbf{lfp}(F)$. Da F monoton ist, folgt, dass

$$R^{i+1} \ \stackrel{\text{def}}{=} \ F(R^i) \ \subseteq \ F(\mathbf{lfp}(F)) \ = \ \mathbf{lfp}(F).$$

□

Den kleinsten Fixpunkt einer monotonen Funktion kann man leicht berechnen, indem man nach und nach die einzelnen Induktionsstufen berechnet und abbricht, sobald diese stationär werden:

2.21 Proposition. *Ist $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ monoton und in polynomieller Zeit berechenbar, so kann $\mathbf{lfp}(F)$ in polynomieller Zeit berechnet werden.*

Beweis: Es gibt höchstens $|A|$ Induktionsstufen, und jede davon kann in polynomieller Zeit aus der vorangegangenen berechnet werden. □

2.2.2 Die kleinste Fixpunktlogik

2.22 Definition (Operator $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$).
Sei σ eine Signatur, $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, R eine k-stellige Relationsvariable und $\vec{x} = x_1, .., x_k$ ein Tupel aus k verschiedenen Variablen erster Stufe.
Jede $\mathrm{FO}[\sigma \dot\cup \{R\}]$-Formel $\varphi(R, \vec{x})$ definert in jeder σ-Struktur $\mathfrak{A}$ eine Abbildung $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ wie folgt:

$$\begin{array}{rccl} F_{\varphi,\mathfrak{A}}: & \mathrm{Pot}(A^k) & \to & \mathrm{Pot}(A^k) \\ & P & \mapsto & \{\vec{a} \in A^k \mid \mathfrak{A} \models \varphi[P, \vec{a}]\}. \end{array}$$

Zum Beispiel kann man sich φ als Datenbankanfrage vorstellen und $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ als die Abbildung, die jeder Datenbank-Relation P das Ergebnis der Anfrage zuordnet.

Die im Folgenden definierte *monotone Fixpunktlogik* ist eine Erweiterung der Logik erster

Stufe durch einen Operator, mit dem man aus einer Formel $\varphi(R,\vec{x})$ eine neue Formel erhalten kann, die $[\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t})$ genannt wird, und die in jeder Struktur $\mathfrak{A}$ genau von den Tupeln $\vec{t} \in A^k$ erfüllt wird, die zu dem kleinsten Fixpunkt der Operation $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ gehören. Dafür sollte man natürlich wissen, ob der kleinste Fixpunkt auch wirklich existiert. Gemäß dem Satz von Knaster und Tarski (Satz 2.15) existiert der kleinste Fixpunkt von $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ auf jeden Fall dann, wenn $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ *monoton* ist.

2.23 Definition (Monotone Fixpunktlogik MFP). Sei σ eine Signatur.
Die Formelmenge MFP$[\sigma]$ ist induktiv durch die Regeln (A1),(A2),(A3),(BC) und (Q1) der Logik erster Stufe, sowie die folgende Regel (MFP) definiert:

(MFP) Ist $\varphi(R,\vec{x})$ eine MFP$[\sigma]$-Formel, wobei

- R eine k-stellige Relationsvariable, für ein $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$,
- $\vec{x} = x_1,\ldots,x_k$ ein Tupel aus k verschiedenen Variablen erster Stufe, und
- φ außer R und $\vec{x}$ evtl. noch andere freie Variablen hat,

ist $\vec{t} = t_1,\ldots,t_k$ ein k-Tupel aus Variablen erster Stufe und/oder Konstantensymbolen aus σ, und ist ***$F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ monoton auf jeder endlichen σ-Struktur*** $\mathfrak{A}$, so ist

$$\psi \;:=\; [\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t})$$

eine MFP$[\sigma]$-Formel.

2.24 Bemerkungen.

(a) Die Menge der *freien Variablen* einer MFP$[\sigma]$-Formel ist induktiv definiert wie für FO bzw. SO, mit der zusätzlichen Regel

$$\textit{frei}\big(\,[\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t})\,\big) \;:=\; \big(\textit{frei}(\varphi) \setminus \{R,\vec{x}\}\big) \cup \{t_i \mid t_i \in \mathrm{Var}_1\}.$$

(b) Gilt $\textit{frei}(\varphi) = \{R,\vec{x},\vec{u},\vec{S}\}$, für ein Tupel $\vec{u}$ von Variablen erster Stufe und ein Tupel $\vec{S}$ von Relationsvariablen, so nennen wir die Variablen in $\vec{u}$ die *Parameter* der Formel $[\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}(\varphi)](\vec{t})$.

2.25 Definition (Semantik von MFP$[\sigma]$-Formeln). Die Semantik von MFP$[\sigma]$-Formeln der Form $\psi := [\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t})$ ist folgendermaßen definiert:
Ist $\textit{frei}(\psi) = \{\vec{u},\vec{S}\}$, ist $\mathfrak{A}$ eine endliche σ-Struktur, sind $\vec{u}^{\mathfrak{A}}$ Elemente aus A, und sind $\vec{S}^{\mathfrak{A}}$ Relationen über A mit den zu den Relationsvariablen in $\vec{S}$ passenden Stelligkeiten, so gilt:

$$(\mathfrak{A},\vec{S}^{\mathfrak{A}},\vec{u}^{\mathfrak{A}}) \models [\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t}) \quad :\Longleftrightarrow \quad \vec{t}^{\,\mathfrak{A}} \in \mathbf{lfp}(F_{\varphi,(\mathfrak{A},\vec{S}^{\mathfrak{A}},\vec{u}^{\mathfrak{A}})}).$$

Aus der Übung ist bekannt, dass Monotonie von FO-Formeln auf endlichen Strukturen unentscheidbar ist. Es gibt also keinen Algorithmus, der bei Eingabe einer Formel $\varphi(R,\vec{x})$ entscheidet, ob $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ für alle endlichen Strukturen $\mathfrak{A}$ monoton ist.
Daher ist die Syntax von MFP unentscheidbar, d.h. es gibt keinen Algorithmus, der bei Eingabe einer Formel ψ entscheidet, ob diese zu MFP gehört.

Wünschenswert wäre, eine Fixpunktlogik zu defineren, bei der man schon an der Syntax einer Formel erkennt, ob diese zur Logik gehört oder nicht. Ein rein *syntaktisches* Kriterium, dass hinreichend für Monotonie ist, wird durch die folgende Definition gegeben:

2.26 Definition. Eine Formel $\varphi(R,\vec{x})$ heißt *positiv in* R, falls Atome der Form $R(\vec{y})$ in φ stets im Bereich einer *geraden* Anzahl von Negationssymbolen vorkommen.

Man sieht leicht:

2.27 Proposition. *Für jede Formel $\varphi(R,\vec{x})$, die positiv in R ist, gilt:*
$F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ *ist* monoton *für alle endlichen Strukturen $\mathfrak{A}$.*

Die *kleinste Fixpunktlogik* ist analog zur monotonen Fixpunktlogik definiert, mit dem Unterschied, dass man jetzt an Stelle der Monotonie fordert, dass Formeln $\varphi(R,\vec{x})$, auf die der Fixpunktoperator $\mathbf{lfp}(\cdot)$ angewandt werden soll, *positiv* in R sind.

2.28 Definition (Kleinste Fixpunktlogik LFP). Sei σ eine Signatur.
Die Formelmenge LFP$[\sigma]$ ist induktiv durch die Regeln (A1),(A2),(A3),(BC) und (Q1) der Logik erster Stufe, sowie die folgende Regel (LFP) definiert:

(LFP) Ist $\varphi(R,\vec{x})$ eine MFP$[\sigma\dot{\cup}\mathrm{Var}_2]$-Formel, wobei

- R eine k-stellige Relationsvariable, für ein $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$,
- $\vec{x} = x_1,\ldots,x_k$ ein Tupel aus k verschiedenen Variablen erster Stufe, und
- φ außer R und $\vec{x}$ evtl. noch andere freie Variablen hat,

ist $\vec{t} = t_1,\ldots,t_k$ ein k-Tupel aus Variablen erster Stufe und/oder Konstantensymbolen aus σ, und ist ***φ positiv in R***, so ist

$$\psi \;:=\; [\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t})$$

eine LFP$[\sigma]$-Formel.

Die *Semantik* der LFP-Formeln ist genauso definiert wie die Semantik von MFP.

2.29 Beispiele. (a) *Erreichbarkeit:*

Sei $G = (V,E,s,t)$ ein Graph mit zwei ausgezeichneten Knoten s,t. Dann gilt

$$G \;\models\; \big[\mathbf{lfp}_{R,x}\big(x = a \;\vee\; \exists z\,(R(z) \wedge E(z,x))\big)\big](t)$$

genau dann, wenn es in G einen Pfad von s nach t gibt.

Dies sieht man, indem man die einzelnen Stufen $R^0, R^1, R^2, \ldots$ des Operators $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ ausrechnet. Per Induktion nach i erhält man so für obige Beispielformel:

$$R^i \;=\; \{v \in V \mid \text{es gibt in } G \text{ einen Pfad der Länge} \leqslant i \text{ von } s \text{ nach } v\}.$$

Daher gilt für $\mathbf{lfp}(F_{\varphi,\mathfrak{A}}) = R^\infty$:

$$R^\infty \;=\; \{v \in V \mid \text{es gibt in } G \text{ einen Pfad von } s \text{ nach } v\}.$$

(b) *Graphzusammenhang:*

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt

$$G \models \forall x\, \forall y\, \big[\mathbf{lfp}_{R,x,y}\, E(x,y) \;\vee\; \exists z\, \big(R(x,z) \wedge E(z,y)\big)\big](x,y)$$

genau dann, wenn G zusammenhängend ist.
Für die einzelnen Stufen gilt hier in jedem Graphen G:

$$R^i \;=\; \{(u,v) \in V^2 \mid \text{es gibt in } G \text{ einen Pfad der Länge} \leqslant i \text{ von } u \text{ nach } v\}.$$

(c) *Eine definierbare Wortsprache:*

Sei $\sigma = \{<, P_a, P_b\}$ die Signatur, um Wörter $w \in \{a,b\}^*$ als σ-Strukturen $\mathfrak{A}_w$ zu kodieren (siehe Übungsblatt 1).
Wir definieren nun eine Formel $\varphi(R,x)$, die positiv in R ist, so dass für alle nicht-leeren Worte $w \in \{a,b\}^*$ gilt:

$\mathfrak{A}_w \models [\mathbf{lfp}_{R,x}\, \varphi](i) \iff$ an Position i steht in w der Buchstabe a, und auf den ersten i Positionen in w stehen eine *ungerade* Anzahl von as.

Wenn wir φ so gewählt haben, gilt für jedes Wort w:

$$\mathfrak{A}_w \;\models\; \forall x\Big(\underbrace{\big(P_a(x) \wedge \neg\exists y\, (P_a(y) \wedge x < y)\big)}_{x \text{ ist die Position des letzten } as \text{ in } w} \rightarrow \neg[\mathbf{lfp}_{R,x}\, \varphi](x)\Big)$$

genau dann, wenn die Anzahl der as in w gerade ist.

Wahl der Formel $\varphi(R,x)$:

$$\begin{aligned}\varphi(R,x) \;:=\; & \Big(P_a(x) \wedge \neg\exists y\, (P_a(y) \wedge y < x)\Big) \vee \\ & \Big(\exists z\, \exists y\, \big(\, R(z) \wedge P_a(y) \wedge P_a(x) \wedge (z < y < x) \wedge \\ & \qquad \forall u\, (z < u < y \vee y < u < x) \rightarrow P_b(u)\big)\Big).\end{aligned}$$