

## Theoretische Informatik II

### 14. Übung

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 7., 8. und 10. Februar

**Aufgabe 76** [mündlich]

Zeigen Sie, dass die Polynomialzeit-Reduktionsrelation  $\leq^p$  transitiv und reflexiv ist.

**Aufgabe 77** [mündlich]

Der **Kleene-Stern** einer Sprache  $L$  ist definiert durch

$$L^* = \{x_1 \dots x_k \mid k \geq 0 \text{ und } x_1, \dots, x_k \in L\}.$$

Zeigen Sie, dass die Komplexitätsklassen P und NP abgeschlossen sind unter

1. Vereinigung,
2. Schnitt und
3. dem Kleene-Stern.

**Aufgabe 78** [mündlich]

Sei  $\mathcal{C}$  eine Sprachklasse. Die Klasse der  $\mathcal{C}$ -vollständigen Probleme definieren wir wie in der Vorlesung:  $L$  heißt  $\mathcal{C}$ -schwer, falls für alle  $A \in \mathcal{C}$  gilt:  $A \leq^p L$ . Ist darüber hinaus  $L \in \mathcal{C}$ , so heißt  $L$   $\mathcal{C}$ -vollständig. Die Klasse  $\{\bar{A} \mid A \in \mathcal{C}\}$  der Komplementärsprachen von  $\mathcal{C}$  bezeichnen wir mit  $\text{co-}\mathcal{C}$  und NPC bezeichnet die Klasse der NP-vollständigen Sprachen.

1. Zeigen Sie, dass eine Sprache  $A$  genau dann NP-vollständig ist, wenn  $\bar{A}$  co-NP-vollständig ist.
2. Zeigen Sie, dass die Sprache UNSAT der unerfüllbaren Booleschen Formeln co-NP-vollständig ist (d.h.  $\text{TAUT} \in \text{co-NPC}$ ).
3. Sei TAUT die Sprache der Booleschen Formeln, die von allen Wahrheitsbelegungen erfüllt werden (so genannte Tautologien). Zeigen Sie, dass TAUT ebenfalls in co-NPC ist.
4. Zeigen Sie, dass SAT genau dann in co-NP liegt, wenn  $\text{NP} = \text{co-NP}$  ist.

**Aufgabe 79**

[mündlich]

Sei  $L := \{w\#x\#bin(m) \mid M_w \text{ ist eine } k\text{-DTM, die } x \text{ in } m \text{ Schritten akzeptiert}\}$ .  
Zeigen Sie, dass  $L$  EXP-vollständig ist.

**Aufgabe 80**

[mündlich]

Zeigen Sie, dass der Abschluss von E unter  $\leq^p$  gleich EXP ist:

$$\text{EXP} = \{A \mid \exists B \in \text{E} : A \leq^p B\}.$$

**Aufgabe 81**

[mündlich]

Zeigen Sie, dass das Erfüllbarkeitsproblem für KNF-Formeln, in denen jede Variable höchstens zweimal vorkommt, in P entscheidbar ist.

**Aufgabe 82**

[mündlich]

Zeigen Sie, dass das Erfüllbarkeitsproblem für 3-KNF-Formeln, in denen jede Variable höchstens dreimal vorkommt, NP-vollständig ist.

**Aufgabe 83**

[mündlich]

Zeigen Sie, dass das Erfüllbarkeitsproblem für 3-KNF-Formeln, in denen alle Klauseln aus genau drei Literalen bestehen und in denen jede Variable höchstens dreimal vorkommt, in P entscheidbar ist.

**Aufgabe 84**

[mündlich]

Klassifizieren Sie folgende Entscheidungsprobleme entsprechend ihrer Komplexität als effizient lösbar (d.h. in P) bzw. nicht effizient lösbar (d.h. NP-hart oder co-NP-hart):

- $\text{WP}_{\text{DFA}}$  (das Wortproblem für reguläre Sprachen, beschrieben durch einen DFA),
- $\text{LP}_{\text{DFA}}$  (das Leerheitsproblem für DFAs),
- $\text{ÄP}_{\text{DFA}}$  (das Äquivalenzproblem für DFAs),
- $\text{IP}_{\text{DFA}}$  (das Inklusionsproblem für DFAs),
- $\text{SP}_{\text{DFA}}$  (das Schnittproblem für DFAs).

Welche Klassifikation ergibt sich, wenn die regulären Sprachen nicht durch einen DFA, sondern durch einen NFA beschrieben werden?