

## Übungen zur Kryptologie II

### 1. Übung

#### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für eine  $(N, M)$ -Hashfunktion  $h : X \rightarrow Y$  und für  $y \in Y$  sei

$$h^{-1}(y) = \{x \in X \mid h(x) = y\}.$$

- a) Bestimmen Sie die Verteilung und den Erwartungswert  $\bar{s}$  von  $S_y = \|h^{-1}(y)\|$  im ZOM.
- b) Zeigen Sie:

$$\sum_{y \in Y} (S_y - \bar{s})^2 = 2S + N - N^2/M,$$

wobei  $S$  die Zufallsvariable  $S = \|\{\{x, x'\} \subseteq X \mid h(x) = h(x'), x \neq x'\}\|$  ist.

- c) Zeigen Sie für  $S$  die untere Schranke

$$S \geq \frac{1}{2} \left( \frac{N^2}{M} - N \right),$$

wobei Gleichheit nur im Fall  $S_y = N/M$  für alle  $y \in Y$  eintritt.

#### Aufgabe 2

Sei  $h : X \rightarrow Y$  eine beliebige, aber feste  $(N, M)$ -Hashfunktion.

- a) Zeigen Sie:

$$\text{Prob}[h(x_1) = h(x_2)] \geq 1/M,$$

falls  $x_1, x_2$  zufällig unter Gleichverteilung aus  $X$  gewählt werden.

- b) Bestimmen Sie die Erfolgswahrscheinlichkeit  $\varepsilon(h, y)$  von  $\text{FindPreimage}(h, y, q)$ , falls für  $X_0$  eine zufällige Teilmenge von  $X$  der Größe  $q$  gewählt wird.
- c) Bestimmen Sie die durchschnittliche Erfolgswahrscheinlichkeit  $\varepsilon(h, q)$  von  $\text{FindPreimage}(h, y, q)$ , falls  $X_0$  wie in b) und  $y$  zufällig aus  $Y$  gewählt wird.