

Übungen zur Kryptologie II

1. Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für eine (N, M) -Hashfunktion $h : X \rightarrow Y$ und für $y \in Y$ sei

$$h^{-1}(y) = \{x \in X \mid h(x) = y\}.$$

- a) Bestimmen Sie die Verteilung und den Erwartungswert \bar{s} von $S_y = \|h^{-1}(y)\|$ im ZOM.
- b) Zeigen Sie:

$$\sum_{y \in Y} (S_y - \bar{s})^2 = 2S + N - N^2/M,$$

wobei S die Zufallsvariable $S = \|\{\{x, x'\} \subseteq X \mid h(x) = h(x'), x \neq x'\}\|$ ist.

- c) Zeigen Sie für S die untere Schranke

$$S \geq \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{M} - N \right),$$

wobei Gleichheit nur im Fall $S_y = N/M$ für alle $y \in Y$ eintritt.

Aufgabe 2

Sei $h : X \rightarrow Y$ eine beliebige, aber feste (N, M) -Hashfunktion.

- a) Zeigen Sie:

$$\text{Prob}[h(x_1) = h(x_2)] \geq 1/M,$$

falls x_1, x_2 zufällig unter Gleichverteilung aus X gewählt werden.

- b) Bestimmen Sie die Erfolgswahrscheinlichkeit $\varepsilon(h, y)$ von $\text{FindPreimage}(h, y, q)$, falls für X_0 eine zufällige Teilmenge von X der Größe q gewählt wird.
- c) Bestimmen Sie die durchschnittliche Erfolgswahrscheinlichkeit $\varepsilon(h, q)$ von $\text{FindPreimage}(h, y, q)$, falls X_0 wie in b) und y zufällig aus Y gewählt wird.