Institut für Informatik
Komplexität und Kryptografie
Prof. Dr. Johannes Köbler

Sommersemester 2004
14. April 2004

Theoretische Informatik III

1. Übung

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis zum 6. Mai 2004

Für die Zulassung zur Prüfung am Ende des Semesters müssen mindestens 50 % der Punkte bei den *schriftlich zu bearbeitenden* Aufgaben erreicht worden sein. Die Aufgaben sollen in Gruppen von zwei bis drei Personen bearbeitet und abgegeben werden. Diese Gruppen sollen über das ganze Semester gleich bleiben. Die Abgabe der Lösungen erfolgt *in den Übungen* zum angegebenen Abgabetermin.

Aufgabe 1 [mündlich]

Untersuchen Sie die folgenden Relationen (zwischen Menschen) auf Reflexivität, Irreflexivität, Transitivität, Symmetrie und Antisymmetrie.

1. x kennt y
2. x ist Geschwister von y
3. x ist Vorfahr von y
4. x ist gleich alt wie y
5. x ist größer als y

Aufgabe 2 [mündlich]

Überprüfen Sie die Korrektheit der folgenden Aussagen. Beweisen Sie Ihre Behauptung!

1. Ist R reflexiv, so ist R nicht irreflexiv
2. Ist R irreflexiv, so ist R nicht reflexiv
3. R ist reflexiv genau dann, wenn R nicht irreflexiv ist

Aufgabe 3 [mündlich]

Sei $R \subseteq A \times A$ eine transitive Relation. Zeigen Sie, dass R genau dann asymmetrisch ist, wenn R irreflexiv ist.

Aufgabe 4 [mündlich]

Betrachten Sie die Relation

$$R = \{(a,a),\ (a,b),\ (a,c),\ (b,b),\ (b,c)\}$$

auf der Menge $A = \{a, b, c, d\}$. Wieviele Elemente müssen zu R jeweils mindestens hinzugefügt werden, damit man eine reflexive, symmetrische, antisymmetrische, transitive Relation bzw. eine Äquivalenzrelation auf A erhält. (Die Elemente sind anzugeben).

Aufgabe 5 [mündlich]

Die Verkettung der Relationen $R_1, R_2 \subseteq A \times A$ ist definiert durch

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid \exists b \in A : (a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2\}.$$

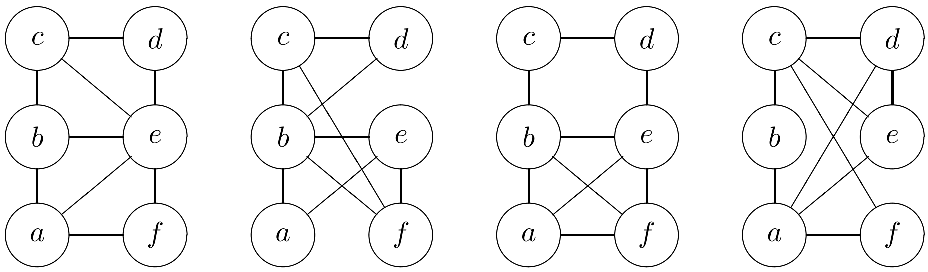
Sei nun A die Menge aller Menschen. R_1 bezeichne die Relation „ist verheiratet mit“, R_2 die Relation „ist Mutter von“und R_3 die Relation „ist Kind von“. Beschreiben Sie umgangsprachlich die folgenden Kompositionen: $R_1 \circ R_2$, $R_2 \circ R_1$, $R_2 \circ R_3$, $R_3 \circ R_2$, $R_2 \circ R_1 \circ R_3$.

Aufgabe 6 [4 Punkte]

Beweisen Sie, dass eine Relation R genau dann transitiv ist, wenn $R^2 \subseteq R$ ist.

Aufgabe 7 [mündlich]

Geben Sie die Gradsequenz der folgenden Graphen an. Welche der Graphen sind isomorph zueinander, welche nicht? (mit Begründung)



Aufgabe 8 [mündlich]

1. Sei $V = \{1, 2, ..., n\}$. Wieviele Kanten hat ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, wenn von jedem Knoten genau eine Kante wegführt?

2. Wieviele verschiedene solche Graphen gibt es? Zeichen Sie alle diese Graphen für $n = 2$.

3. Wie ändert sich die Anzahl, wenn zusätzlich gefordert wird, dass jeder Knoten Eingangsgrad eins hat? Zeichnen Sie alle solchen Graphen für $n = 3$.

Aufgabe 9 [3 Punkte]

Sei $V = \{1, 2, ..., n\}$ und $k \geq 1$. Wieviele gerichtete Graphen $G = (V, E)$ mit $d_{out}(v) = k$ für alle Knoten $v \in V$ gibt es? ($d_{in}(v)$ ist beliebig.)

Aufgabe 10 [3 Punkte]

Zeigen Sie, dass es in einer beliebigen Gruppe mit mindestens zwei Personen immer mindestens zwei gibt, die die gleiche Anzahl von Freunden (innerhalb der Gruppe) haben.