

Übungsblatt 2

Aufgabe 6

Verschlüsseln Sie den Text KLARTEXT mittels einer

- additiven Chiffre mit dem Schlüssel $k = 13$,
- affinen Chiffre mit dem Schlüssel $k = (25, 2)$,
- Vigenère-Chiffre mit dem Schlüssel $k = \text{TOP}$,
- Hill-Chiffre mit der 4×4 -Schlüsselmatrix aus der Vorlesung.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen $x \in \{0, \dots, m-1\}$ der Kongruenzgleichung

$$ax \equiv_m b$$

in Abhängigkeit von $\text{ggT}(a, m)$ und b . Betrachten Sie zunächst den Fall $b = 0$.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie für $m = 6, 9$ und 26 die Anzahl der invertierbaren 2×2 -Matrizen über \mathbb{Z}_m .

Aufgabe 9

- Zeigen Sie, dass für jede selbstinverse Matrix A über \mathbb{Z}_{26} gilt: $\det(A) \equiv_{26} \pm 1$.
- Bestimmen Sie die Anzahl der selbstinversen 2×2 -Matrizen über \mathbb{Z}_{26} .

Aufgabe 10 (schriftlich, 10 Punkte)

- Zeigen Sie, dass im Fall p prim genau $(p^2 - 1)(p^2 - p)$ invertierbare 2×2 -Matrizen über \mathbb{Z}_p existieren.
- Bestimmen Sie die Anzahl aller invertierbaren $k \times k$ -Matrizen über \mathbb{Z}_p .

Hinweis: Benutzen Sie, dass eine $k \times k$ -Matrix über \mathbb{Z}_p , p prim, genau dann invertierbar ist, wenn die Zeilen der Matrix linear unabhängige Vektoren (über \mathbb{Z}_p) sind.