

Aufgabenblatt 2

Abgabetermin: 7. Juni

Aufgabe 11

Zeigen Sie:

- $(R^T)^T = R$
- $\overline{R^T} = \overline{R}^T$
- $R \subseteq S \Leftrightarrow R^T \subseteq S^T$
- $(R \cup S)^T = R^T \cup S^T$ und $(R \cap S)^T = R^T \cap S^T$

Aufgabe 12

Zeigen Sie:

- Wenn die Relationen R und S reflexiv sind, dann sind ebenfalls die Relationen $R \cup S$ und $R \cap S$ reflexiv.
- Wenn die Relationen R und S symmetrisch sind, dann sind ebenfalls die Relationen $R \cup S$ und $R \cap S$ symmetrisch.

Aufgabe 13 (schriftlich zu bearbeiten, 4 Punkte)

Die symmetrische Hülle einer Relation R auf einer Menge A ist definiert durch

$$h_{sym}(R) := \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid R \subseteq S, S \text{ symmetrisch}\}.$$

- Zeigen Sie, dass $h_{sym}(R)$ symmetrisch ist und somit die kleinste symmetrische Relation ist, die R enthält.
- Zeigen Sie, dass gilt: $h_{sym}(R) = R \cup R^T$

Aufgabe 14

- Bestimmen Sie die größte (bzgl. Mächtigkeit) symmetrische Relation, die in der Relation

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2)\}$$

(über $A = \{1, 2, 3, 4\}$) enthalten ist.

- Muss jede Relation eine größte transitive Relation enthalten? Beweisen Sie ihre Behauptung.

Aufgabe 15 (*schriftlich zu bearbeiten*, 4 Punkte)

a) Sei R eine Relation auf einer n -elementigen Menge A . Zeigen Sie:

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i; \quad R^* = \bigcup_{i=0}^{n-1} R^i.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Schubfachprinzip: Nach Verteilen von mehr als n Gegenständen auf n Schubfächer enthält mindestens ein Schubfach mehr als einen Gegenstand.

b) Zeigen Sie: R symmetrisch $\Rightarrow R^+, R^*$ symmetrisch.

Aufgabe 16

Sind mit E_1, E_2 auch $E_1 \cap E_2, E_1 \cup E_2, E_1 \circ E_2$ Äquivalenzrelationen? Welche der drei Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität bleiben erhalten, welche nicht? Beweisen Sie ihre Behauptung.

Aufgabe 17 (*schriftlich zu bearbeiten*, 4 Punkte)

Gegeben sei folgende Relation

$$R = \{(2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (5, 9), (7, 5), (7, 8), (8, 5), (9, 8)\}$$

auf der Menge $A = \{0, 1, \dots, 9\}$. (Stellen Sie sich z.B. vor, 10 Personen wurden befragt, wer wen gut leiden kann.)

- Welche der Eigenschaften Reflexivität, Irreflexivität, Symmetrie, Asymmetrie, Antisymmetrie und Transitivität liegen vor, welche nicht?
- Veranschaulichen Sie die Relationen $R, R^T, h_{refl}(R), h_{sym}(R), R^2, R^3, R^+, R^*$ durch die zugehörigen gerichteten Graphen.