

Log. zur Aufg. 1, Blatt 10:

Sei $(KTA) \{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ mit
 $\#(\text{Prod}) = m$, $\#(\text{Abn.}) = n$ gegeben.

Wir beweisen, dass die $\#(KE) = m+n-1$ ist.

Sei $0 \leq b_1$. Dann führen wir die Ind. über m , wobei n bel. aber fest ist.
Anschließend gehen wir analog vor mit Ind. über n und m bel. aber fest.

IA: $m=1$, d.h. wir haben 1 Prod. und n Abnehmer:

$$\begin{array}{c|ccc} & b_1 & \dots & b_m \\ \hline a_1 & \boxed{c_{11}} & \dots & \boxed{c_{1m}} \end{array}$$

wg. klassische TA

$$\Rightarrow a_1 = \sum_{i=1}^m b_i$$

$$\Rightarrow \#(KE) = m = m+n-1 \quad \checkmark$$

IS IV: Gelte für n Prod. n, m Abn.,
dass $\#(KE) = m+n-1$

IB $\#(KE) = m+n$ für $(n+1)$ Prod. n, m Abnehmer

dazu

T	P \ A	b_1	b_2	- - -	b_m
		a_1	a_2		
	a_1	c_{11}	c_{12}		c_{1m}
	a_2	c_{21}	c_{22}		c_{2m}
	$\vdots$				
	a_{n+1}	$c_{n+1,1}$	$c_{n+1,2}$		$c_{n+1,m}$

- Beachte! $a_1 \leq b_1$!
- $k^* = \min\{b_1 - a_1, a_2\}$
- und in der ersten Zeile sind keine weitere KE außer c_{11} .
- Was bleibt, geht die T^* , die aus T wie folgt entsteht:

T^*	P \ A	$b_1 - a_1$	- - -	b_m
		a_2		
	a_2	c_{21}		c_{2m}
	$\vdots$			
	a_{n+1}	$c_{n+1,1}$		$c_{n+1,m}$

$\Rightarrow T^*$ entsteht aus T durch Auslassung der ersten Zeile, d.h. des ersten Produzenten. Folglich ist T^* auch T^* eine KTA,

mit n Prod. und m Abn.

$$\Rightarrow \#(KE)_{T^*} = m + n - 1.$$

(IV)

$$\text{Aber, } \#(KE)_T = \#(KE)_{T^*} + 1 = m + n \quad \square$$

$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} = 135 \Rightarrow KTA$

u_i	22	33	44	36	$\sum$
v_j	8	3	3	4	0
	6	7	5	8	4
	1	8	10	2	9
	8	3	1	-7	

$\Rightarrow \Delta^{(1)} =$

0 ₂₂	0 ₃₃ ⁺	2	11
-6	0 ₁₅ ⁻	0 ₃₀ ⁺	11
-16	-4	0 ₁₄ ⁻	0 ₃₆

$\min\{22, 15, 14\} = 14$

135

②

u_i	8	32	2	11	0
v_j	-6	0 ₁	0 ₄₄	11	0
	-16	-4	0	0 ₃₆	-16
	0	0	0	16	

$\Rightarrow \Delta^{(2)} =$

0 ₈	0 ₃₂ ⁺	2	-5
-6	0 ₁ ⁺	0 ₄₄ ⁻	-5
0 ₁₄	12	16	0 ₃₆

$\min\{8, 13\} = 1$

③

u_i	7	33	2	-5	0
v_j	-6	0	0 ₄₄	-5	-6
	0 ₁₄	12	16	0 ₃₆	0
	0	0	6	0	

$\Rightarrow \Delta^{(3)} =$

0 ₇	0 ₃₃	-4	-5 ⁺
0 ₁	6	0 ₄₄	1
0 ₁₄ ⁺	12	10	0 ₃₆ ⁻

$\min\{3, 6, 7\} = 3$

④

u_i	0	33	-4	-5	0
v_j	0 ₁	6	0 ₄₄	1	5
	0 ₂₁	12	10	0 ₂₉	5
	-5	0	-5	-5	

$\Rightarrow \Delta^{(4)} =$

-5	0 ₃₃	1	0 ₇
0 ₁	1	0 ₄₄	1
0 ₂₁	7	10	0 ₂₉

5. TP ist opt.

5. TP: $x_{12}=33, x_{14}=7, x_{21}=1, x_{23}=44, x_{31}=21, x_{34}=29, R_{44}=0$

Kosten = $3 \cdot 33 + 4 \cdot 7 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 44 + 1 \cdot 21 + 2 \cdot 29$
 $= 99 + 28 + 6 + 220 + 21 + 58$
 $= 432$

	22	33	44	36	u _i
40	8	3	3	4	0
45	6	7	5	8	2
50	1	8	10	2	-4
v _j	5	5	3	6	

2. Schritt

3	-2	0	-2
-1	0	0	0
0	7	11	0

min {40, 33} = 33

②

3	-2	0	-2	0
-1	0	0	0	0
0	7	11	0	0
0	-2	0	0	

$\Rightarrow \Delta^{(2)} =$

3	0	0	-2
-1	2	0	0
0	9	11	0

③

3	0	0	-2	0
-1	2	0	0	2
0	9	11	0	2
-2	0	-2	-2	

$\Rightarrow \Delta^{(3)} =$

5	0	2	0
-1	0	0	0
0	7	11	0

④

5	0	2	0	0
-1	0	0	0	-1
0	7	11	0	0
0	0	1	0	

$\Rightarrow \Delta^{(4)} \geq 0$

5	0	1	0
0	1	0	1
0	7	10	0

optimal

$$\begin{aligned}
 \text{Kosten} &= 33 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 44 \cdot 5 + 21 \cdot 1 + 29 \cdot 2 = \\
 &= 99 + 28 + 6 + 220 + 21 + 58 = \\
 &= 432
 \end{aligned}$$