

Blatt 4

Aufg. 1:

$$(P) \rightsquigarrow (P'): 8x_1 - 3x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -7x_1 + 6x_2 + x_3 + u_1 = 13 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + u_2 = 7 \\ x_i \geq 0 \ i \in [3], \ u_j \geq 0 \ j \in [2] \end{cases}$$

$$ZF = 0 - (-8x_1 + 3x_2 + 2x_3)$$

Start BP $x^{(1)}$ mit BV: u_1, u_2

$x^{(1)}$					$x^{(2)}$				
		$x_1 \downarrow$	x_2	x_3			$x_2 \downarrow$	x_3	
	0	-8	3	2		56/5	8/5	-1/5	18/5
u_1	13	-7	6	1	u_1	144/5	7/5	(16/5)	12/5
u_2	7	(5)	-2	1	x_1	7/5	1/5	-2/5	1/5

$x^{(3)}$				
		u_2	u_1	x_3
	101/8	27/16	1/16	15/4
x_2	57/8	7/16	5/16	3/4
x_1	17/4	3/8	1/8	1/2

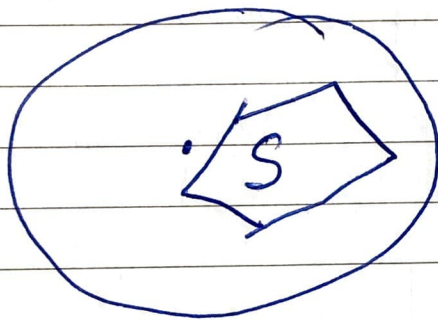
$\Rightarrow x^{(3)} = (17/4, 57/8, 0)^T$ ist opt. Pkt
für (P). $ZF(x^{(3)}) = 101/8$

zur Aufg. 2

Einige Gedanken, bevor ich die Aufgabe beginnen zu lösen:

- Was bedeutet "Lösungsmenge S ist beschränkt"?

Bild 1.2: - S ist ein konv. Polyeder



beschränkt

$\left\{ \begin{array}{l} S \text{ nicht beschr.} \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ in ... für unbeschr. S gibt es
(mind.) eine Halbgerade (Strahl).
Sonst kann man S beschr.

Formal: S ist beschr., wenn eine
Sphäre $K(\mathbf{0}_n, r)$ ex. mit $S \subseteq K(\mathbf{0}_n, r)$.
Dabei ist $\mathbf{0}_n$ der Nullpt in $\mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$.

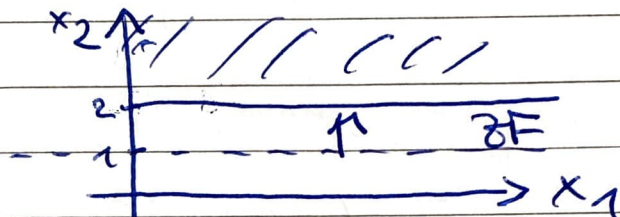
Man nennt oft unbeschr. konv. Polyeder
auch Polytop.

• S ist unbeschr., wenn S nicht
beschr. ist 

Aufg. 2:

zu (1) Nein, z.B. die LOA (P) mit

$$(P) \max \{x_2 \mid x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$



$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \right\}$$

$\Rightarrow S$ ist unbeschränkt.

zu (2) (Kriterium:) S ist unbeschr.-gew.
in der optimalen SimplexTabelle
ein $l \in N$ ex. mit $d_{ol} = 0$ und
für alle $i \in B$ gilt: $d_{il} \leq 0$.
Beweis:

($\Leftarrow$) In diesem Fall (vgl. Satz 1, Kap. 2)
kann man den Wert von x_l bel. erhöhen,
ohne den Wert der ZF zu ändern.

$\Rightarrow$ Somit ist mit bel. $x_l^* \geq 0$ x^* ein
optimaler Pkt für (P) und damit
ist x^* aus S . Folglich ist S unbeschr.

		NBV	
%	x^*	x_l^*	
		$d_{ol} \neq 0$	
BV	x_i		d_{il}

Sei optimale SimplexTab.
mit opti Pkt x^* ;

($\rightarrow$) Sei S unbeschr., $\Rightarrow S$ nicht leer.
 $\Rightarrow$ ex. mind. eine Ecke $x^* \in S$, (x^* ist auch Ecke von M) und eine optimale SimplexTabelle (ST) dazu!

Da S unbeschr. ist, gibt es (mind.) eine Strahl T in S , der in einer Ecke $\tilde{x}$ von S startet, d.h.

$$S \supseteq T := \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = \tilde{x} + t \cdot v, t \geq 0, \text{ } 0_n \neq v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Sei $I := \{i \mid v_i \neq 0\} \Rightarrow I \neq \emptyset$.

Offensichtlich lassen sich alle Variablen $\tilde{x}_i, i \in I$ beliebig erhöhen (ev. in Abhängigkeit) % $\tilde{x} \mapsto z$ % und der Wert der ZF ändert sich nicht, da diese Punkte aus S sind.

% Dabei ist z_i aus dem Erhöhen von $\tilde{x}_i$ entstanden %.

Wie sieht die ST für $\tilde{x}$ dabei aus?

Nun, betr. $\tilde{x}$: $\tilde{x}$ ist Ecke von S und damit eine opt. Ecke von M . Also, es gibt eine opt. ST für $\tilde{x}$.

Sei $i \in I$. Da $I \neq \emptyset$, ex. ein solches i , ev. auch mehr.

		NBV	
	$\tilde{x}$		$\tilde{x}_i$
		d ₀₀	d _{0i}
BV	$\tilde{x}_s$	d _{s0}	... d _{si} ...

1. Fall: $\tilde{x}_i$ - NBV

Da $\tilde{x}_i$ bel. erhöhen läßt, gilt für jedes

$s \in B$:

$$\text{neu}(\tilde{x}_s) = d_{s0} - d_{si} \tilde{x}_i$$

Da $\tilde{x}_i$ bel. wahren kann, so muss $d_{si} \leq 0$

für alle $s \in B$ sein. Damit sich der

Wert der ZF dabei nicht ändert muss $d_{0i} = 0$ sein, denn es gilt:

$$\text{neu } d_{00} = d_{00} - \frac{d_{\text{pivot},0} \cdot d_{0i}}{d_{\text{pivot},i} \neq 0},$$

und obdA

$$\tilde{x}_{\text{pivot},i} = d_{\text{pivot},0} \neq 0,$$

$$\Rightarrow d_{0i} = 0.$$

✓

2. Fall $\tilde{x}_i$ - BV. D.h. $i \in B$

Da $\tilde{x}_i$ bel. wahren kann, ex. im $\ell \in N$,
und $\tilde{x}_\ell$ wächst unbedr.

Dann aus

~~Es~~ $\tilde{x}_i = d_{i0} - d_{i\ell} \tilde{x}_\ell$ folgt, dass

$$d_{i\ell} \leq 0 \text{ und } d_{i0} = 0$$

Da $\tilde{x}_\ell$ unbedr. wächst, folgt dann,
analog, wie im Fall 1, dass auch alle
 $d_{s\ell} \leq 0$ sind, für $s \in B$ bel. □