

Ganzzahlige Optimierung (Gomory-Schnitt)

Sei

$$(P) := \max \{ c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z} \}$$

ein ILP und sei

$$G := \{ x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0 \}.$$

Betrachte die Relaxation (P_0) von (P) :

$$(P_0) := \{ c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0 \},$$

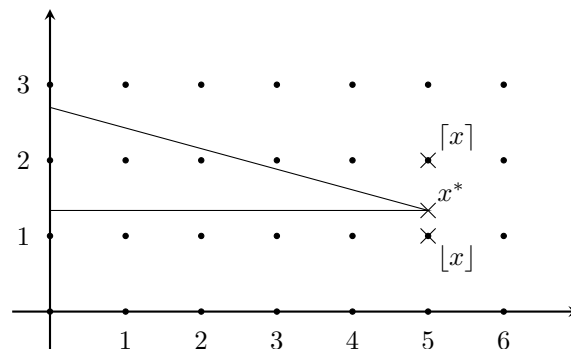
d.h.

$$M_0 := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0 \}.$$

Es gilt: $G \subseteq M_0$.

- Falls ein $x^* \in \mathbb{Z}^n$ existiert, sodass x^* optimal für (P_0) ist, so ist x^* auch für (P) optimal.

Im Allgemeinen ist $x^* \in \mathbb{R}^n$; man darf nicht runden, denn:



Offensichtlich ist x^* sowohl aufgerundet als auch abgerundet nicht zulässig!

- Falls $x^* \notin \mathbb{Z}^n$, fügen wir eine Restriktion $a^T x \leq a_0$ hinzu, die x^* abschneidet, also

$$x^k \notin M_1 := M_0 \cap \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq a_0 \}.$$

Durch diese Restriktion soll aber kein ganzzahliger Punkt von M_0 abgeschnitten werden, d.h. es soll gelten: $G \subseteq M_1$.

- Löse $(P_1) = \max \{ c^T x \mid x \in M_1 \}$.

Wie findet man solche Schnitte?

Formal: Betrachte das ILP

$$(P) = \max \{ c^T x \mid Ax = b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n \}$$

mit

$$\text{rg } A = m, \quad A \in \mathcal{M}(m, n)$$

sowie die Relaxation

$$(P_0) = \max \{ c^T x \mid Ax = b, x \geq 0 \}$$

mit

$$G = \{ x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax = b, x \geq 0 \} \text{ und} \\ M_0 = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0 \}.$$

Sei (P_0) lösbar mit $x^* \notin \mathbb{Z}^n$ optimal für (P_0) . Dann nennt man die Restriktion $a^T x \leq a_0$ eine *Schnitt / Cut* von M_0 , falls M_0 alle ganzzahligen Punkte außer x^* enthält, d.h.

$$x^* \notin M_0 \cap \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq a_0 \} \supseteq G.$$

Berechnung der Gomory-Schnitte: Betrachte $(P), (P_0), G, M_0$.

Sei x^* Lösung von (P_0) und seien

$$\begin{array}{ll} x_i & BV \\ x_j & NBV. \end{array}$$

Sei $Ax = b$ äquivalent zu

$$x_i + \sum_{j \in \mathbb{N}} \bar{a}_{ij} \cdot x_j = \bar{b}_i \quad \forall i \in B \quad \forall x \in M_0$$

mit

$$x_i^* = \bar{b}_i, \quad i \in B, \quad x_j^* = 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Es gilt:

$$x_i + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} \cdot x_j = \bar{b}_i \quad \forall x \in G \quad \forall i \in B \quad (1)$$

$$\xrightarrow{G \subseteq \mathbb{R}_+^n} x_i + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor \cdot x_j \leq \bar{b}_i \quad \forall x \in G \quad \forall i \in B$$

$$\xrightarrow{G \subseteq \mathbb{Z}^n} x_i + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor \cdot x_j \leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor \quad \forall x \in G \quad \forall i \in B \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)} \sum_{j \in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) \cdot x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \quad \forall x \in G \quad \forall i \in B. \quad (3)$$

Bemerkung: Es gilt:

(a) x^* wird abgeschnitten, d.h.

$$M_1 := M_0 \cap \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ genügt (3)} \} \not\ni x^*.$$

(b) Wenn $\tilde{x} \in \mathbb{Z}^n \cap M_0$, so ist $\tilde{x} \in M_1$.

D.h. (3) definiert eine Schnittebene für M_0 .

Beweis:

zu (a) Wir wissen, dass

$$x_j^* = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Angenommen, $x^* \in M_1 \Rightarrow x^*$ erfüllt auch (3).

$$\Rightarrow 0 = \sum_{j \in \mathbb{N}} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) \cdot x_j^* \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \quad \forall i \in B. \quad (4)$$

Wegen

$$\begin{aligned} x^* &\notin \mathbb{Z}^n, \\ x_i^* &= \bar{b}_i \quad \forall i \in B \end{aligned}$$

gibt es aber ein $i_0 \in B$ mit $\lfloor \bar{b}_{i_0} \rfloor \neq \bar{b}_{i_0}$ und damit $\bar{b}_{i_0} - \lfloor \bar{b}_{i_0} \rfloor > 0$.
Damit gilt für i_0 wegen (4):

$$0 \geq \bar{b}_{i_0} - \lfloor \bar{b}_{i_0} \rfloor > 0 \quad \text{↯}$$

zu (b) Sei $\tilde{x} \in \mathbb{Z}^n$ und $\tilde{x} \in M_0 \Rightarrow \tilde{x} \in G$. Wegen (3) gilt:

$$\tilde{x} \in M_0 \cap \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ genügt (3)} \}.$$

□

Bezeichnung: Der in (3) definierte Schnitt heißt Gomory-Schnitt.