Angewandte Mathematik für die Informatik

PD Dr. Louchka Popova-Zeugmann
PD Dr. Wolfgang Kössler

9. Juli 2018

Lineare Optimierung

1. Das allgemeine lineare Optimierungsproblem (LOP)
2. Das ganzzahlige lineare Optimierungsproblem (ILP)

Motivation

Optimales Verhalten ist oft gefragt auf den Gebieten der

1. Wirtschaft,
2. Technik,
3. Politik,
4. Alltag,

(fast) überall...

Beispiel

Ein Portfolio-Unternehmen verfügt über 15 Millionen Dollar für Investitionen und es plant diese vollständig zu investieren. Das Unternehmen untersucht vier verschiedene Vermögensanlagen. Diese sind zusammen mit deren erwarteten Jahresertägen und den maximalen Geldbeträgen, die man jeweils in jede Anlage investieren möchte, in der folgenden Tabelle angegeben:

Investition	Jahresertrag	Maximaler Geldbetrag (in Dollar)
Schatzbriefe	7%	\$5 Mio
Stammaktie	9%	\$7 Mio
Geldmarkt (Fonds)	6%	\$12 Mio
Kommunalanleihen	8%	\$9 Mio

Ausgehend von der Wirtschaftslage schätzt das Unternehmen, dass die Schatzbriefe und die Stammaktie sich gut im Laufe des Jahres entwickeln werden und entscheidet sich, mindestens 30% seines Investitionsvolumens dort einzusetzen. Die Investition im Geldmarkt und Kommunalanleihen wird dagegen auf höchstens 40% limitiert.

Wie soll das Unternehmen seine Mittel einsetzen damit es einen maximalen Ertrag erzielt und dabei seine Bedingungen erfüllt?

Mathematisches Modell

Dies führt zum folgenden mathemanischen Modell:
x_1 : Investitionsbetrag (in Dollar) für die Schatzbriefe
x_2 : Investitionsbetrag (in Dollar) für die Stammaktie
x_3 : Investitionsbetrag (in Dollar) für die Fonds
x_4 : Investitionsbetrag (in Dollar) für die Kommunalanleihen

30% von $15 Mio sind $4,5 Mio und 40% von $15 Mio sind $6 Mio. Damit erhalten wir folgendes Modell:

$$\begin{aligned}
\text{Maximiere } & \left(0,07 \cdot x_1 + 0,09 \cdot x_2 + 0,06 \cdot x_3 + 0,08 \cdot x_4\right) \\
\text{so dass } & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\
& x_1 + x_2 \geq 4,5 \\
& x_3 + x_4 \leq 6 \\
& x_1 \leq 5 \\
& x_2 \leq 7 \\
& x_3 \leq 12 \\
& x_4 \leq 9 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Und nun, wie findet man eine Lösung?
Mit Hilfe der Linearen Optimierung!

Lineare Optimierung

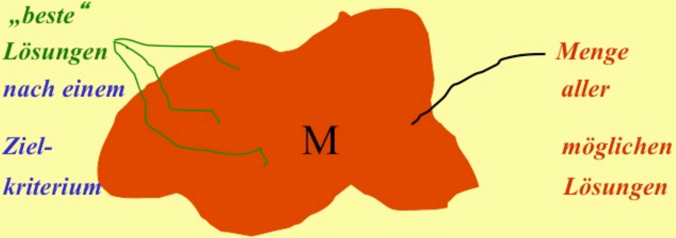
- **Reales Problem:** - Gewisse Bedingungen / Restriktionen gegeben

  - Unser Ziel ist, unter allen Lösungen die „beste“ zu finden.

nach welche Kriterien auch immer

modellieren (verfeinern, präzisieren)

- **Math. Problem:**



$$(P)\ \min/\max \{ f(x) \mid x \in M \}$$ – **allg. Aufgabe**

Zielkriterium ↗ ↖ *Restriktionsmenge*

- **Wenn: f** – *lin. Funktion* $f(x) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + c_0$

  und **M** *durch lin. Funktionen beschrieben*

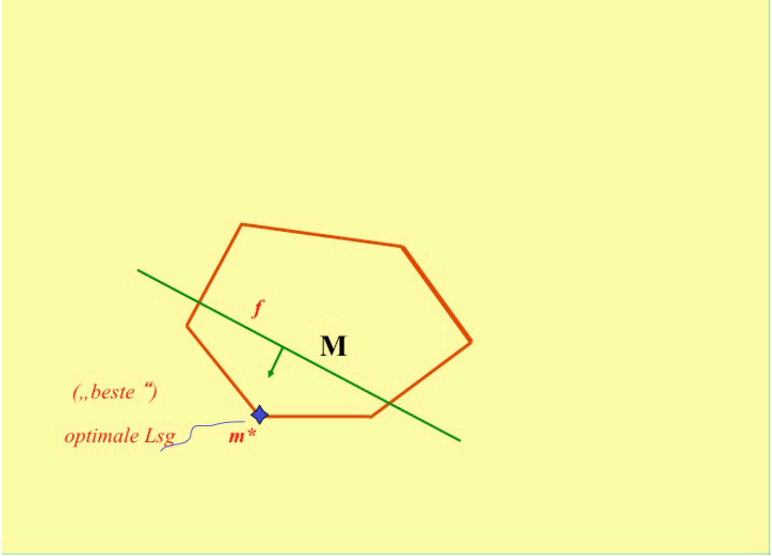
  mit
  $$g_i(x) = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{i,n} x_n - b_i$$
  $$M = \{x \in R^n \mid g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

  dann ist

  (P) min / max { < c,x > | Ax ≤ b },

  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ **,** $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ **,** $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ **, A** – *Matrix*

  d. Typs (m,n) **lin. Optimierungsaufgabe**


f
M
(„beste “)
optimale Lsg
m*

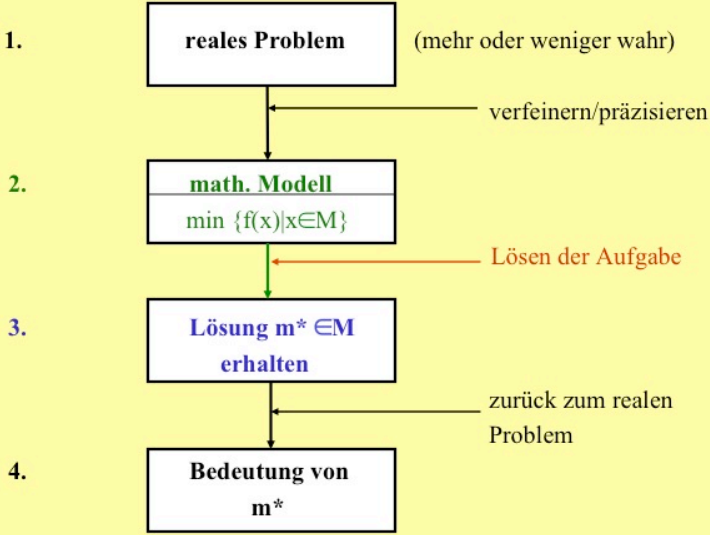
Lösen der math. Aufgabe

- *Simplex Verfahren*
- *Dualität*
- *Chatchijan-Methode*
- *...*

zurück zum realen Problem

Bedeutung / Interpretation von m*

Bearbeitungsprozeß



Einige allgemeine Grundbegriffe

Definition 1.1 (Skalarprodukt in dem VR $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ über dem Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$).

Die Abbildung $\langle ., . \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt, falls gilt:

- $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$,
- $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$ für alle $v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^n$,
- $\langle \lambda \cdot v, w \rangle = \lambda \cdot \langle v, w \rangle$, für alle $v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$,
- $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und $\langle v, v \rangle = 0$ gdw $v = \mathbf{0}$.

Bemerkung 1.1.

Natürlich kann man den Begriff **Skalarprodukt** *auch in einem beliebigen VR über einem beliebigen Körper definieren. Dies verlangt jedoch zusätzliche Definitionen.*
Für uns ist aber genau der VR $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ über dem Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ relevant.

Einige allgemeine Grundbegriffe

- Betrachten wir den VR $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ über den Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

  $$\text{Dann ist } \langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i \text{ ist ein SP.}$$

  Dieses Skalarprodukt wird Euklidisches SP oder Standard-SP genannt.

- Ab sofort bezeichnen wir den VR $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ über den Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ kurz nur $\mathbb{R}^n$.

Einige allgemeine Grundbegriffe

Definition 1.2.

Seien $x_1, \cdots, x_k$ Elemente (Punkte) aus $\mathbb{R}^n$. Das Element x heißt

1. eine lineare Kombination von $x_1, \cdots, x_k$, wenn es k reele Zahlen $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ gibt, so dass gilt:
$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot x_i,$$
2. eine affine Kombination von $x_1, \cdots, x_k$, wenn
   - 2.1 x ist eine lineare Kombination von $x_1, \cdots, x_k$, etwa $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot x_i$, und
   - 2.2 $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$,
3. eine konvexe Kombination von $x_1, \cdots, x_k$, wenn
   - 3.1 x ist eine affine Kombination von $x_1, \cdots, x_k$, etwa $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot x_i$, und
   - 3.2 $\lambda_i \geq 0$ for all $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Definition 1.3 (konvexe Hülle).

Sei $M := \{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge von Punkten in $\mathbb{R}^n$. Die Menge aller konvexen Kombinationen von $\{x_1, \dots, x_k\}$ heißt die konvexe Hülle von M (Bez.: $conv\{x_1, \dots, x_k\}$).

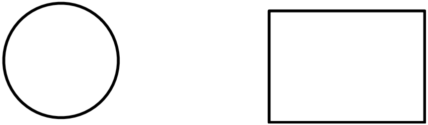
Bezeichnung 1.2.

Seien x_1, x_2 zwei Punkte aus $\mathbb{R}^n$. Die konvexe Hülle $conv\{x_1, x_2\}$ heißt auch Verbindungsstrecke zwischen x_1 und x_2.

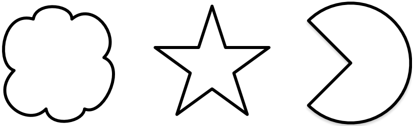
Definition 1.4 (konvexe Menge).

Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn für beliebige $x_1, x_2 \in M$ gilt auch $conv\{x_1, x_2\} \subseteq M$.

Beispiele



konvexe Mengen



nicht konvexe Mengen

Grundbegriffe der Linearen Optimierung

Definition 1.5 (Lineares Optimierungsproblem).
Sei $x, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{mxn}$. Das Problem

$$(P) \quad \max / \min\{\langle c, x\rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0\}$$

heißt ein *Lineares Optimierungsproblem (kurz: LOP)*.

Ein LOP wird auch *Lineare Optimierungsaufgabe (kurz: LOA)* genannt.
Sei in dem Weiteren, o.B.d.A., $m \leq n$.

Bezeichnung 1.3.
$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b, x \geq 0\}$ heißt Restriktionsbereich oder Bedingungsmenge , $\langle c, x\rangle$ wird Zielfunktion genannt.

Grundbegriffe der Linearen Optimierung: Example

Betrachten wir die LOA (P) mit

$$(P) \quad \max\{2x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_6 \mid \begin{aligned}[t] & x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 12 \\ & 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 4x_6 = 8 \\ & x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 6\}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$m = 2, \quad n = 6,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$c = (2, -7, 5, 4, 0, 1)^T, \quad b = (12, 8)^T.$$

Grundbegriffe der Linearen Optimierung

- Sei $rg(A) = m$. Dann existieren m linear unabhängige Spalten in der Matrix A. Seien diese, o.B.d.A., die ersten m.
- Sei $A = (A_B \mid A_N)$, wobei A_B aus den ersten m Spalten besteht. A_B heißt dann eine Basismatrix von Matrix A.
- Daraus ergibt sich:
  - $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$

  und
  - $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$.

Die Variablen $x_i, i \in B$ nennt man *Basisvariablen* (kurz: BV) und die Variablen $x_j, j \in N$ – *Nichtbasisvariablen* (kurz: NBV).

B und N werden gleichzeitig auch als Bezeichnungen für Indexmengen (Nummer von Spalten in der Matrix A) verwendet: B steht für die Indexmenge von m linear unabhängigen Spalten aus A, die die Matrix A_B bilden. N bezeichnet die Indexmenge der restlichen Spalten. Somit, falls A_B aus den ersten m Spallten besteht, dann ist $B = \{1, \cdots, m\}$ und $N = \{m + 1, \cdots, n\}$.

Grundbegriffe der Linearen Optimierung: Example

Betrachten wir die LOA (P) mit

$$(P) \quad \max\{2x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_6 \mid \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 12 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 4x_6 = 8 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6\}. \end{array}$$

Somit haben wir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir $A = (A_{B_i} \mid A_{N_i})$ mit:

$B_1 = \{1,2\}$, d.h. $N_1 = \{3,4,5,6\}$, so ist $A_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ **keine** Basismatrix.

$B_2 = \{1,3\}$, d.h. $N_2 = \{2,4,5,6\}$, so ist $A_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **eine** Basismatrix.

$B_3 = \{5,6\}$, d.h. $N_3 = \{1,2,3,4\}$, so ist $A_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ auch **eine** Basismatrix, etc.

Betrachten wir die LOA $\max\{\langle c, x\rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0\}$.

Definition 1.6 ((zulässiger) Basispunkt).
Der Punkt $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}$ mit $A \cdot x = b$ heißt Basispunkt von A zur Basismatrix A_B.
Wenn zusätzlich gilt, dass $x_B \geq 0_m$, dann heißt der Punkt x ein zulässiger Basispunkt von A zur Basismatrix A_B.

Bemerkung 1.4.
Ein zulässiger Basispunkt gehöhrt zum Restriktionsbereich der betrachteten LOA.

---

0 bezeichnet hier ein Nullvektor entspr. Dimension, die manchmal als Index noch angegeben wird.

Grundbegriffe der Linearen Optimierung: Example

Betrachten wir die LOA (P) mit

$$(P) \quad \max\{2x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_6 \mid \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 12 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 4x_6 = 8 \\ x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 6\}. \end{array}$$

Wir haben schon festgestellt, dass:

für $B_2 = \{1, 3\}$ die Matrix $A_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **eine** Basismatrix ist.

Folglich ist $x^* = (x_{B_2} \mid 0)^T$ ein (**der!**) Basispunkt zur Basismatrix B_2.

Aus $\quad A \cdot x^* = b \quad$ bzw. $\quad A_{B_2} \cdot x_{B_2} = b \quad$ lässt sich berechnen, dass

$x_1 = 12$ und $x_3 = -28$, d.h. $x^* = (12, 0, -28, 0, 0, 0)^T$.

Somit ist x^* **kein zulässiger** Basispunkt.

Analog lässt sich berechnen, dass $x^{**} = (x_{B_3} \mid 0)^T$ **ein** zulässiger Basispunkt ist.

Simplexalgorithmus

Wir betrachten erneut die LOA (P) $\max\{\langle c, x\rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0\}$.

Für den Restriktionsbereich gilt:

$$\begin{aligned} A \cdot x &= b \qquad \text{gdw} \\ (A_B \mid A_N) \cdot \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} &= b \qquad \text{gdw} \\ A_B \cdot x_B + A_N \cdot x_N &= b. \end{aligned}$$

Folglich gilt für den Restriktionsbereich:

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b - A_B^{-1} \cdot A_N \cdot x_N. \tag{S1}$$

Simplexalgorithmus

Für die Zielfunktion gilt:

$$
\begin{aligned}
\langle c, x\rangle &= \langle c_B, x_B\rangle + \langle c_N, x_N\rangle \\
&= c_B^{\mathsf{T}} \cdot x_B + c_N^{\mathsf{T}} \cdot x_N \\
&= c_B^{\mathsf{T}}\big(A_B^{-1} \cdot b - A_B^{-1} \cdot A_N \cdot x_N\big) + c_N^{\mathsf{T}} \cdot x_N \\
&= c_B^{\mathsf{T}} \cdot A_B^{-1} \cdot b - \left(c_B^{\mathsf{T}} \cdot A_B^{-1} \cdot A_N - c_N^{\mathsf{T}}\right) \cdot x_N. \qquad \text{(S2)}
\end{aligned}
$$

Simplexalgorithmus

Jetzt schreiben wir (S1) und (S2) komponentenweise auf:

$$x_k = d_{k0} - \sum_{j \notin B} d_{kj} \cdot x_j \qquad \forall k \in B \qquad \text{und}$$

$$\langle c, x \rangle = d_{00} - \sum_{j \notin N} d_{0j} \cdot x_j$$

wobei

$$d_{k0} = \left(A_B^{-1}\right)_k \cdot b,$$

$$d_{kj} = \left(A_B^{-1}\right)_{k\bullet} \cdot \left(A_N\right)_{\bullet j} \text{ und}$$

$$d_{00} = c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot b.$$

Simplexalgorithmus

Damit ergeben sich für das LOP (P) folgende drei Schreibformen:

$$(P) = \max\{\langle c, x\rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0\} \tag{A}$$

$$= \max\{c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot b - (c_B^\top \cdot A_B^{-1} \cdot A_N - c_N^\top) \cdot x_N \mid (x_B =) A_B^{-1} \cdot b - A_B^{-1} \cdot A_N \cdot x_N \geq 0, x_N \geq 0\} \tag{B}$$

$$= \max\{d_{00} - \textstyle\sum_{j \in N} d_{0j} \cdot x_j \mid (x_k =) d_{k0} - \displaystyle\sum_{j \notin B} d_{kj} \cdot x_j \ \forall k \in B,\ x_j \geq 0 \ \forall j \in N\}. \tag{C}$$

Aus (C) läßt sich das erste Simplextableau aufstellen:

Simplexalgorithmus

Definition 1.7 (1. Simplextableau:).

$$
\begin{array}{rc|c|c|ccccc}
 & & & & \multicolumn{5}{c}{\text{NBV } (N)} \\
\cline{4-9}
 & & & & x_{m+1} & \dots & x_j & \dots & x_n \\
\cline{3-9}
\multicolumn{2}{r|}{\color{red}{\textit{charakteristische Zeile}}} & \color{red}{d_{0,0}} & & \color{red}{d_{0,m+1}} & \color{red}{\dots} & \color{red}{d_{0,j}} & \color{red}{\dots} & \color{red}{d_{0,n}} \\
\cline{2-9}
 & x_1 & d_{1,0} & & d_{1,m+1} & \dots & d_{1,j} & \dots & d_{1,n} \\
 & x_2 & d_{2,0} & & d_{2,m+1} & \dots & d_{2,j} & \dots & d_{2,n} \\
\text{BV} & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(B) & x_i & d_{i,0} & & d_{i,m+1} & \dots & d_{i,j} & \dots & d_{i,n} \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & x_m & d_{m,0} & & d_{m,m+1} & \dots & d_{m,j} & \dots & d_{m,n}
\end{array}
$$

$$\underbrace{d_{m,0}}_{A_B^{-1}\cdot b}\ \underbrace{d_{m,m+1}\ \dots\ d_{m,j}\ \dots\ d_{m,n}}_{A_B^{-1}\cdot A_N}$$

Wenn $A_B = E_m$, so ist dann $A_B^{-1} = E_m$, $A_B^{-1} \cdot b = b$ und $A_B^{-1} \cdot A_N = A_N$.

Simplexalgorithmus

Fragen: **Antworten:**

1. Was mache ich, wenn nicht alle Variablen nichtnegativ sind?
   Transformation
2. Wie erhalte ich aus einem Ungleichungssystem ein Gleichungssystem? Transformation
3. Wie finde ich leicht einen zulässigen Basispunkt?
   Ein Hilfsproblem lösen

Simplexalgorithmus

ad (1): Sei x_i eine beliebige Variable, d.h. $x_i \in \mathbb{R}$.

Dann definieren wir $x_i := x_i^+ - x_i^-$, wobei $x_i^+ \geq 0$ und $x_i^- \geq 0$.

Das ist offenbar immer möglich!

Beispiel: $$\begin{aligned} 7 &= 8 - 1 \\ &= 17 - 10, \\ -5 &= 3 - 8 \\ &= 0 - 5, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Diese Transformation ist sehr einfach (linear). Sie erhöht aber die Dimension des betrachteten VRs.

Simplexalgorithmus

ad (2): Falls eine der Restriktionen, z.B. i-te, bei der Modellierung des Problems mit einer Ungleichung gegeben ist, etwa:

$$\begin{array}{lll} (A) & a_{i,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{i,n} \cdot x_n \leq b_i & \text{bzw.} \\ (B) & a_{i,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{i,n} \cdot x_n \geq b_i, & \end{array}$$

wobei o.B.d.A. $b_i \geq 0$,

dann transformieren wir die Ungleichung durch **Schlupfvariablen**, hier mit u_i bezeichnet, zur einer Gleichung:

$$\begin{array}{lll} (A') & a_{i,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{i,n} \cdot x_n + u_i = b_i, \quad u_i \geq 0 & \text{bzw.} \\ (B') & a_{i,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{i,n} \cdot x_n - u_i = b_i, \quad u_i \geq 0. & \end{array}$$

Auch diese Transformation ist sehr einfach (linear). Auch sie erhöht aber die Dimension des betrachteten VRs.

ad (3): Wird später behandelt.

Beispiel: 1. Simplextableau

Beispiel 1.5.

Maximiere $5 \cdot x_1 - x_2$,
so dass

$$4 \cdot x_1 + 34 \cdot x_2 \leq 17,$$
$$5 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \leq 9 \textit{ und}$$
$$x_2 \geq 0.$$

$$(P) \quad 5 \cdot x_1 - x_2 \longrightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 34 \cdot x_2 \leq 17 \\ 5 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \leq 9 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(P') \quad 5 \cdot x_1^+ - 5 \cdot x_1^- - x_2 \longrightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4 \cdot x_1^+ - 4 \cdot x_1^- + 34 \cdot x_2 \leq 17 \\ 5 \cdot x_1^+ - 5 \cdot x_1^- + 12 \cdot x_2 \leq 9 \\ x_2 \geq 0, x_1^+ \geq 0, x_1^- \geq 0 \end{cases}$$

und $x_1 = x_1^+ - x_1^-$.

$$(P'') \quad 5 \cdot x_1^+ - 5 \cdot x_1^- - x_2 \longrightarrow \max$$

Frage: Wie kann ich feststellen, ob ein Punkt optimal ist?

Antwort:

Satz 1.8.
Wenn $d_{0j} \geq 0$ für alle $j \in N$, so ist dann der Punkt $\overline{x} = \begin{pmatrix} (d_{i0})_{i=1\ldots m} \\ 0_{n-m} \end{pmatrix}$ optimal für die LOA.

Bemerkung 1.6.
Offensichtlich ist der Punkt $\overline{x}$ ein zulässiger Basispunkt.

Simplexalgorithmus

Betrachten wir erneut das Beispiel 1.5:

$$(P'') \quad 5 \cdot x_1^+ - 5 \cdot x_1^- - x_2 \longrightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4 \cdot x_1^+ - 4 \cdot x_1^- + 34 \cdot x_2 + u_1 = 17 \\ 5 \cdot x_1^+ - 5 \cdot x_1^- + 12 \cdot x_2 + u_2 = 9 \\ \; x_2 \geq 0, x_1^+ \geq 0, x_1^- \geq 0, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

BV: u_1, u_2, NBV: Rest, BM$= E_2$.
Damit ist das erste Simplex-Tableau für (P) das folgende:

		x_1^+	x_1^-	x_2
	0	-5	5	1
u_1	17	4	-4	34
u_2	9	5	-5	12

Dann gilt nach Satz 1.8, dass der Punkt $(x_1, x_2) = (0, 0)$ nicht optimal für (P) ist.

Beweis von Satz 1.8

Sei $(P)\quad \max\{\langle c, x\rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0\}$ eine LOA mit dem Restriktionsbereich M, dh. $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b, x \geq 0\}$ und $A = (A_B \mid A_N)$.
Sei $x \in M$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\langle c, x\rangle &= \langle c_B, x_B\rangle + \langle c_N, x_N\rangle \\
&= \left\langle c_B, A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \right\rangle + \langle c_N, x_N\rangle \\
&= \left\langle c_B, A_B^{-1} b \right\rangle - \left\langle c_B, A_B^{-1} A_N x_N \right\rangle + \langle c_N, x_N\rangle \\
&= \underbrace{\left\langle c_B, A_B^{-1} b \right\rangle}_{d_{0,0}} - \left\langle (A_B^{-1} A_N)^T c_B, x_N \right\rangle + \langle c_N, x_N\rangle \\
&= d_{0,0} - \langle \underbrace{(A_B^{-1} A_N)^T c_B - c_N}_{\left(d_{0,j}\right)_{j \in N}}, x_N \rangle .
\end{aligned}$$

Beweis von Satz 1.8 (Fortsetzung)

Wir **wissen**: $ZF(\overline{x}) = \overline{z} = d_{00}$.

Da $d_{0,j} \geq 0$ für alle $j \in N$ ist, gilt:

$$\left(d_{0,j}\right)_{j \in N} = (A_B^{-1} A_N)^T c_B - c_N \geq 0_{n-m}$$

$$\Rightarrow c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T \geq 0_{n-m}^T$$

$$\Rightarrow c_B^T A_B^{-1} A_N \geq c_N^T.$$

Sei $y \in M$ beliebig und sei $ZF(y) = z$.

Zu zeigen: $\overline{z} \geq z$ für alle z, d.h. $\overline{x}$ ist optimal.

Beweis von Satz 1.8 (Fortsetzung)

Jetzt betrachten wir die Werte der Zielfunktion in x und $y = \begin{pmatrix} y_B \\ y_N \end{pmatrix}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} z = ZF(y) &= \langle c_B, y_B \rangle + \langle c_N, y_N \rangle \\ &= c_B^T y_B + c_N^T y_N \\ &\leq c_B^T y_B + c_B^T A_B^{-1} A_N y_N \\ &= c_B^T A_B^{-1} (\underbrace{A_B y_B + A_N y_N}_{=b, \text{ da } y \in M}) \\ &= c_B^T A_B^{-1} b = d_{0,0} = \overline{z} \end{aligned}$$

□

Frage: Wenn ein betrachteter Punkt nicht optimal ist, wie finde ich einen besseren?

Antwort:

Satz 1.9.
Wenn ein $\ell \in N$ mit $d_{0\ell} < 0$ existiert, so kann durch eine Basiswechsel der Wert der Zielfunktion erhöht* werden.*

Beweis des Satzes 1.9

Sei $\ell \in N$ mit $d_{0,\ell} < 0$.

Wir erhöhen den Wert von x_ℓ soweit, wie es möglich ist. Die restlichen Variablen x_j, $j \in N$ bleiben dabei 0.

Bedingungen für die Erhöhung von x_ℓ sind die Nichtnegativitätsbedingungen:

$$x_i = d_{i,0} - d_{i,\ell} x_\ell \geq 0 \qquad \text{für alle } i \in B$$

damit x_i zulässig bleibt.

Wenn $d_{i,\ell} \leq 0$, so wird die i-te Bedingung nicht verletzt bei $x_\ell \to \infty$.

Beweis des Satzes 1.9:Fortsetzung

Kriterium für Maximum gegen Unendlich:

Wenn **alle** $d_{i,\ell} \leq 0$, $(i \in B)$, so kann x_ℓ unbeschränkt wachsen!
Damit wächst auch der Wert der Zielfunktion unbeschränkt, denn wir haben:

$$ZF = d_{00} - \sum_{j \in N} d_{0j} x_j = d_{0,0} - \underbrace{d_{0,\ell}}_{<0} x_\ell \longrightarrow \infty, \qquad \text{wenn}(x_\ell \longrightarrow \infty).$$

D.h. wenn x_ℓ unbeschränkt wächst, so wächst die Zielfunktion auch unbeschränkt.

Die Aufgabe nennen wir dann **nicht lösbar**, denn es gibt keinen optimalen Punkt. Für beliebigen Punkt aus dem Restriktionsbereich gilt: Es gibt immer ein weiterer Punkt im Restriktionsbereich, der einen besseren Zielfunktionswert liefert.

Beweis des Satzes 1.9:Fortsetzung

Betrachten wir nun den Fall, dass es mindestens ein $i \in B$ gibt mit $d_{i,\ell} > 0$. Sei B_+ die Menge aller solcher i, d.h.

$$B_+ = \{i \mid i \in B \wedge d_{i,\ell} > 0\}.$$

Für $i \in B_+$ gilt dann, dass $x_\ell \leq \frac{d_{i,0}}{d_{i,\ell}}$ ist und damit $x_i \geq 0$ für alle $i \in B_+$ bleibt.

Der Wert der Variable x_ℓ kann damit bis zu $\min\limits_{i \in B_+} \left(\frac{d_{i,0}}{d_{i,\ell}}\right)$ erhöht werden. Sei

$$\min_{i \in B_+} \left(\frac{d_{i,0}}{d_{i,\ell}}\right) = \frac{d_{k,0}}{d_{k,\ell}} \text{ für } k \in B_+.$$

Wenn $x_\ell = \frac{d_{k,0}}{d_{k,\ell}}$ gesetzt wird, folgt dass $x_k = 0$ wird. % $x_k = d_{k,0} - d_{k,\ell} x_\ell$ %

Jetzt bilden wir eine neue Basis $\tilde{B}$ (wobei noch zu zeigen ist, dass $\tilde{B}$ Basis ist):

$$\tilde{B} := (B \setminus \{k\}) \cup \{\ell\} \quad \text{und } \tilde{N} := (N \setminus \{\ell\}) \cup \{k\},$$

d.h. die Basisvariable x_k wird gegen die Nichtbasisvariable x_ℓ ausgetauscht.

Beweis des Satzes 1.9:Fortsetzung

Der neue zulässige Punkt $\tilde{x}$ ist dann:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_k &= 0, \\
\tilde{x}_i &= d_{i,0} - d_{i,\ell} \underbrace{\frac{d_{k,0}}{d_{k,\ell}}}_{=\tilde{x}_\ell} \geq 0, \qquad i \neq k, \qquad i \in B \\
\tilde{x}_\ell &= \frac{d_{k,0}}{d_{k,\ell}} \geq 0, \\
\tilde{x}_j &= 0, \qquad j \in N, \qquad j \neq \ell.
\end{aligned}$$

Der neue Wert der Zielfunktion ist folglich:

$$d_{0,0} - d_{0,\ell}\tilde{x}_\ell = d_{0,0} - \underbrace{d_{0,\ell}}_{<0} \underbrace{\frac{d_{k,0}}{d_{k,\ell}}}_{>0} > d_{0,0} \quad \text{falls } d_{k,0} > 0,$$

d.h. der Wert der Zielfunktion steigt.

Wieso ist $\tilde{B}$ eine **Basis**?

Beweis des Satzes 1.9:Fortsetzung

Es genügt zu zeigen, dass $A_{\tilde{B}}$ regulär ist, wobei die Matrix $A_{\tilde{B}}$ nur aus den Elementen (Spalten) $A_{.i}, i \in B$ und $A_{.\ell}$ besteht, nicht aber aus $A_{.k}$.

Annahme : $A_{\tilde{B}}$ ist singulär. Dann existieren Zahlen $\lambda_i \in \mathbb{R}$, nicht alle Null, mit

$$\sum_{\substack{i \in B \\ i \neq k}} \lambda_i A_{.i} + \lambda_\ell A_{.\ell} = 0.$$

Offensichtlich ist $\lambda_\ell \neq 0$ % da sonst die Spalten $A_{.i}, i \in B, i \neq \ell$ lin. abh. wären. % und damit gilt:

$$A_{.\ell} = \sum_{\substack{i \in B \\ i \neq k}} \lambda_i' A_{.i} \qquad \text{für } \lambda_i' = -\frac{\lambda_i}{\lambda_\ell}.$$

Es gilt weiterhin, dass $d_{k,\ell} > 0$, da $k \in B_+$ und damit ist

$$0 < d_{k,\ell} = \left(A_B^{-1}\right)_{k.} A_{.\ell} = \sum_{\substack{i \in B \\ i \neq k}} \lambda_i' \underbrace{\left(A_B^{-1}\right)_{k.} A_{.i}}_{=\delta_{k,i}, \text{wobei } k \neq i} = 0$$

was ein **Widerspruch** ist. Folglich ist $A_{\tilde{B}}$ regulär. $\square$

$\delta_{k,i}$ ist dabei das Kroneckersymbol: $\delta_{k,i} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$

Simplexalgorithmus

			NBV							
			x_{m+1}	$\cdots$	x_ℓ	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	
		$d_{0,0}$	$d_{0,m+1}$	$\cdots$	$d_{0,\ell}$	$\cdots$	$d_{0,j}$	$\cdots$	$d_{0,m}$	
	x_1	$d_{1,0}$	$d_{1,m+1}$	$\cdots$	$d_{1,\ell}$	$\cdots$	$d_{1,j}$	$\cdots$	$d_{1,m}$	
	x_2	$d_{2,0}$	$d_{2,m+1}$	$\cdots$	$d_{2,\ell}$	$\cdots$	$d_{2,j}$	$\cdots$	$d_{2,m}$	
BV	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
	x_k	$d_{k,0}$	$d_{k,m+1}$	$\cdots$	$d_{k,\ell}$	$\cdots$	$d_{k,j}$	$\cdots$	$d_{k,m}$	$\leftarrow$ **Pivotzeile**
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
	x_i	$d_{i,0}$	$d_{i,m+1}$	$\cdots$	$d_{i,\ell}$	$\cdots$	$d_{i,j}$	$\cdots$	$d_{i,m}$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
	x_m	$d_{m,0}$	$d_{m,m+1}$	$\cdots$	$d_{m,\ell}$	$\cdots$	$d_{m,j}$	$\cdots$	$d_{m,m}$	
					$\uparrow$ **Pivotspalte**					

$d_{k,\ell}$ heißt **Pivot**-Element

Berechnung des nachfolgenden Tableaus

Es bleibt noch anzugeben, wie die zur neuen Basis $\tilde{B}$ gehörenden $\tilde{d}_{lj}$ aussehen, d.h. wie das neue Simplextableau aus dem alten zu berechnen ist.
Wir wissen:

$$x_i = d_{i0} - \sum_{j \in N} d_{ij} x_j, \qquad \forall i \in B.$$

Diese Gleichung gilt auch für $i = 0$, wobei "x_0" $=$ ZF(x) und x ist der BP bei B.
Für $i = k$ gilt dann:

$$\begin{aligned} x_k &= d_{k0} - \sum_{j \in N} d_{kj} x_j \\ &= d_{k0} - \sum_{\substack{j \neq \ell \\ j \in N}} d_{kj} x_j - d_{k\ell} x_\ell \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für x_ℓ:

$$x_\ell = \frac{1}{d_{kl}}(d_{k0} - \sum_{\substack{j \neq \ell \\ j \in N}} d_{kj} x_j) - \frac{1}{d_{k\ell}} x_k$$

$$= \underbrace{\frac{d_{k0}}{d_{k\ell}}}_{\tilde{d}_{\ell 0}} - (\underbrace{\frac{1}{d_{k\ell}}}_{\tilde{d}_{\ell k}} x_k + \sum_{\substack{j \neq \ell \\ j \in N}} \underbrace{\frac{d_{kj}}{d_{k\ell}}}_{\tilde{d}_{\ell j}} x_j)$$

$\tilde{d}_{\ell 0}$, $\tilde{d}_{\ell k}$, $\tilde{d}_{\ell j}$ sind die Elemente der ℓ-ten Zeile in dem neuen Simplextableau, d.h. die (alte) Pivotzeile sieht wie folgt aus:

$$\tilde{d}_{\ell k} = \frac{1}{d_{k\ell}}, \qquad \tilde{d}_{\ell j} = \frac{d_{kj}}{d_{k\ell}}.$$

Berechnung des nachfolgenden Tableaus (Fortsetzung)

Für beliebige Basisvariablen x_i $(i \neq \ell)$ gilt nach dem Simplexschritt:

$$
\begin{aligned}
x_i &= d_{i0} - \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq \ell}} d_{ij} x_j - d_{i\ell} x_\ell \\
&= d_{i0} - \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq \ell}} d_{ij} x_j - d_{i\ell}\left(\frac{d_{k0}}{d_{k\ell}} - \frac{1}{d_{k\ell}} x_k - \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq \ell}} \frac{d_{kj}}{d_{k\ell}} x_j\right) \\
&= d_{i0} - \frac{d_{i\ell} d_{k0}}{d_{k\ell}} - \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq \ell}} d_{ij} x_j + d_{i\ell} \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq \ell}} \frac{d_{kj}}{d_{k\ell}} x_j + \frac{d_{i\ell}}{d_{k\ell}} x_k \\
&= \underbrace{d_{i0} - \frac{d_{il} d_{k0}}{d_{k\ell}}}_{=\tilde{d}_{i0} \text{(Kreuzregel)}} - \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq \ell}} \underbrace{\left(d_{ij} - \frac{d_{i\ell} d_{kj}}{d_{k\ell}}\right)}_{=\tilde{d}_{ij} \text{(Kreuzregel)}} x_j + \underbrace{\frac{d_{i\ell}}{d_{k\ell}}}_{=-\tilde{d}_{ik}} x_k .
\end{aligned}
$$

Simplexalgorithmus

Anwendung der Kreuzregel auf das Simplextableau

$$
\begin{array}{c|c|c|ccccccc}
 & & \multicolumn{8}{l}{\text{NBV}} \\
\cline{3-10}
 & & & x_{m+1} & \cdots & x_\ell & \cdots & x_j & \cdots & x_n \\
\cline{2-10}
 & & d_{0,0} & d_{0,m+1} & \cdots & d_{0,\ell} & \cdots & d_{0,j} & \cdots & d_{0,m} \\
\cline{2-10}
 & x_1 & d_{1,0} & d_{1,m+1} & \cdots & d_{1,\ell} & \cdots & d_{1,j} & \cdots & d_{1,m} \\
 & x_2 & d_{2,0} & d_{2,m+1} & \cdots & d_{2,\ell} & \cdots & d_{2,j} & \cdots & d_{2,m} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\text{BV} & x_k & d_{k,0} & d_{k,m+1} & \cdots & d_{k,\ell} & \cdots & d_{k,j} & \cdots & d_{k,m} & \leftarrow \textbf{Pivotzeile} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & x_i & d_{i,0} & d_{i,m+1} & \cdots & d_{i,\ell} & \cdots & d_{i,j} & \cdots & d_{i,m} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & x_m & d_{m,0} & d_{m,m+1} & \cdots & d_{m,\ell} & \cdots & d_{m,j} & \cdots & d_{m,m} \\
\cline{2-10}
 & & & & & \uparrow & & & & \\
 & & & & & \textbf{Pivotspalte} & & & &
\end{array}
$$

$d_{k,\ell}$ heißt **Pivot**-Element

Beispiel:

Wir betrachen erneut die LOA (P) aus dem Beispiel 1.5:

Berechne $\quad (P) \quad 5 \cdot x_1 - x_2 \longrightarrow \max$

$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 34 \cdot x_2 \leq 17 \\ 5 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \leq 9 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} .$$

Wir haben bereits das erste Simplextableau aufgestellt:

		x_1^+	x_1^-	x_2
	0	-5	5	1
u_1	17	4	-4	34
u_2	9	5	-5	12

$\Longrightarrow$

		u_2	x_1^-	x_2
	9	1	0	13
u_1	49/5	-4/5	0	122/5
x_1^+	9/5	1/5	-1	12/5

Die rechte Tabelle ist optimal, d.h. der Basispunkt $\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1^+ \\ \overline{x}_1^- \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist optimal. Daraus ergibt sich $x_1 = 9/5 = 1.8$, $x_2 = 0$ und der Wert der Zielfunktion in $\overline{x}$ ist: $ZF(\overline{x}) = 9$.

Noch ein Beispiel:

Berechnen Sie max $(x_1 + x_2)$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases} .$$

Lösung:

		x_1	x_2
	0	-1	-1
u_1	1	1	2
u_2	1	**2**	2

$\Longrightarrow$

		u_2	x_2
	0.5	0.5	0
u_1	0.5	-0.5	1
x_1	0.5	0.5	1

Die rechte Tabelle ist optimal, d.h. der Basispunkt $\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist optimal und der Wert der Zielfunktion in $\overline{x}$ ist: $ZF(\overline{x}) = 0.5$.

Simplexalgorithmus

Fragen: **Antworten:**

- Kann ich bei der Berechnung eines besseren Punktes in einen Zyklus geraten?

  Ja, aber...
  nicht, wenn
  man die lexikographische Simplexmethode verwendet.

- Kann ich in endlich vielen Schritten einen optimalen Punkt finden?

  Ja, weil ...

Lexikographische Simplexmethode

(wenn man in einen Zyklus gerät)

Beispiel 1.7.

$$2x_1 + 2x_2 - 8x_3 - 2x_4 \longrightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 \leq 0 \\ -7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 \leq 0 \\ x_i \geq 0, i = 1 \dots 4 \end{cases}$$

Die Nebenbedingungen werden umgeformt zu

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + u_1 = 0 \\ -7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 + u_2 = 0 \end{cases}$$

und wir rechnen weiter mit dem Simplexalgorithmus

Lösen ohne lexikographiches Vorgehen:

		x_1	x_2	x_3	x_4
	0	-2	-2	8	2
u_1	0	**2**	1	-3	-1
u_2	0	-7	-3	7	2

		u_1	x_2	x_3	x_4
	0	1	-1	5	1
x_1	0	1/2	1/2	-3/2	-1/2
u_2	0	7/2	**1/2**	-7/2	-3/2

		u_1	u_2	x_3	x_4
	0	8	-2	-2	2
x_1	0	-3	-1	**2**	1
x_2	0	7	2	-7	-3

		u_1	u_2	x_1	x_4
	0	5	1	1	-1
x_3	0	-3/2	-1/2	1/2	1/2
x_2	0	-7/2	-3/2	7/2	**1/2**

		u_1	u_2	x_1	x_2
	0	-2	-2	8	2
x_3	0	**2**	1	-3	1
x_4	0	-7	-3	7	2

		x_3	u_2	x_1	x_2
	0	1	-1	5	1
u_1	0	1/2	1/2	-3/2	1/2
x_4	0	1/2	**1/2**	-7/2	-3/2

		x_3	x_4	x_1	x_2
	0	8	2	-2	-2
u_1	0	-3	-1	2	1
u_2	0	7	2	-7	-3

= erstes Tableau!

Simplexalgorithmus (lexikographiche Simplexmethode)

Definition 1.10.

Ein Basispunkt heißt entartet, wenn der Wert mindestens einer Basisvariable Null ist.

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & & & \text{NBV} \\
 & & & x_\ell \\
 & & & d_{o\ell} \\
\hline
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{BV} & x_k & 0 = d_{k0} & d_{k\ell} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Neuer Wert der Zielfunktion bei einem Wechsel $B \to \tilde{B} = (B \setminus \{k\}) \cup \{\ell\}$ ist

$$d_{00} - d_{0\ell} \frac{\overbrace{d_{k0}}^{=0}}{d_{k\ell}} = d_{00}.$$

Wenn das Element d_{kl} das Pivotelement werden sollte, wird sich der Zielfunktionswert nicht ändern!
Daher müssen wir uns in diesem Fall mit der Frage der Endlichkeit des Algorithmus beschäftigen, denn es kann ja sein, daß wir in einen Zyklus geraten, wie das nächste Beispiel auch zeigt.

Simplexalgorithmus (lexikographiche Simplexmethode)

Betrachten wir in diesem Fall die Lange Form des Simplextableaus:

			BV					NBV				
			x_1	$\dots$	x_p	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_q	$\dots$	x_n
		$d_{0,0}$	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$d_{0,m+1}$	$\dots$	$d_{0,q}$	$\dots$	$d_{0,m}$
	x_1	$d_{1,0}$	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$d_{1,m+1}$	$\dots$	$d_{1,q}$	$\dots$	$d_{1,m}$
	x_2	$d_{2,0}$	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$d_{2,m+1}$	$\dots$	$d_{2,q}$	$\dots$	$d_{2,m}$
BV	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	x_p	$d_{p,0}$	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$d_{p,m+1}$	$\dots$	$d_{p,q}$	$\dots$	$d_{p,m}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	x_m	$d_{m,0}$	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$d_{m,m+1}$	$\dots$	$d_{m,q}$	$\dots$	$d_{m,m}$

Simplexalgorithmus (lexikographiche Simplexmethode)

Betrachten wir erneut die Berechnung eines Nachfolger-Simplestableaus:

- Seien B die Menge der BV-Indizes,
- sei N die Menge der NBV-Indizes,
- sei k-te Zeile die Pivot-Zeile,
- sei ℓ-te Spalte die Pivot-Spalte,
  d.h. das Element $d_{k,\ell}$ ist das Pivot-Element in einem Simplextableau.

Wir haben bereits berechnet, dass in dem Nachfolgertableau

- alle Elemente der Pivotzeile des vorhergehenden Tableaus mit $\frac{1}{d_{k\ell}}$ multipliziert werden, d.h. an Stelle der alten Pivot-Zeile z_k steht in dem Nachfolgetableau die Zeile $\tilde{z}_\ell$ mit
$$\tilde{z}_\ell = \frac{1}{d_{k\ell}} z_k,$$
- für jede weitere Zeilen $\tilde{z}_i, i \in B$ gilt, dass sie aus der alten Zeile z_i nach der Kreutzregel entsteht, d.h.
$$\tilde{z}_i = z_i - \frac{d_{i\ell}}{d_{k\ell}} z_k.$$

Simplexalgorithmus (lexikographiche Simplexmethode)

Definition 1.11.

Ein Element $x \in \mathbb{R}$ heißt *lexikographisch positiv* $(x \succ 0)$, falls die erste von Null verschiedene Komponente von x positiv ist.

% $x_1 = (1, 0, 0, -5, 0) \succ 0$, $x_2 = (0, 0, 0, 1, -1, 0) \succ 0$ aber $x_3 = (0, 0, -2, 5, 500) \not\succ 0$ %

Definition 1.12.

Ein Element $x \in \mathbb{R}$ heißt *lexikographisch negativ* $(x \prec 0)$, falls $-x \succ 0$.

% $x_1 = (1, 0, 0, -5, 0) \not\prec 0$, $x_2 = (0, 0, 0, 1, -1, 0) \not\prec 0$ aber $x_3 = (0, 0, -2, 5, 500) \prec 0$ %

Definition 1.13.

Sei die Relation $\succ$ (gesprochen: lexikographisch größer) definiert, wie folgt:

$$\succ: R^n \times R^n \text{mit } x \succ y \Leftrightarrow x - y \succ 0.$$

- Berechnung des Nachfolgertableaus mittels der lexikographischen Simplexmethode *(lexikographische Simplextransformation)*: an der Tafel

Deshalb funkioniert es ...

Satz 1.14.
Seien alle Zeilen z_i *(*$i \in B$*) in der erweiterten Form eines (beliebigen) Simplextableaus lexikographisch positiv.*
Dann sind nach der Simplextransformation alle Zeilen $\tilde{z}_i$*,* $i \in \tilde{B}$ *ebenfalls lexikographisch positiv.*

Beweis: **an der Tafel.**

Bemerkung 1.8.
Offensichtlich kann man den Simplexalgorithmus immer mit einem lexikographisch positives Simplextableau starten.

Simplexalgorithmus (lexikographiche Simplexmethode)

Satz 1.15.
Die charakteristische Zeile im langen Tableau wächst lexikographisch.

Beweis: an der Tafel.

Simplexalgorithmus (lexikographiche Simplexmethode)

Beispiel 1.9.

Betrachten wir wieder das letzte Beispiel. Jetzt verwenden wir die lexikographische Simplexmethode:

		u_1	u_2	x_1	x_2	x_3	x_4
	0	0	0	-2	-2	8	2
u_1	0	1	0	**2**	1	-3	-1
u_2	0	0	1	-7	-3	7	2

		u_1	u_2	x_1	x_2	x_3	x_4
	0	1	0	0	-1	5	1
x_1	0	1/2	0	1	**1/2**	-3/2	-1/2
u_2	0	7/2	1	0	1/2	-7/2	-3/2

		u_1	u_2	x_1	x_2	x_3	x_4
	0	2	0	2	0	2	0
x_2	0	1	0	2	1	-3	-1
u_2	0	3	1	-1	0	-2	-1

Somit finden wir nach drei Schritten (mit der lexikographischen Simplexmethode) einen optimalen Punkt: $\overline{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ *und der Wert der Zielfunktion ist 0.*

Dabei wächst die charakteristische Zeile monoton!

Simplexalgorithmus

Was wir bis jetzt wissen:

Satz 1.16.
Ist der Restriktionsbereich einer linearen Optimierungsaufgabe nicht leer, so kann nur einer der beiden folgenden Fälle eintreten:

1. *Entweder existiert eine Lösung der Aufgabe,*
2. *oder die LOA ist unlösbar, weil die Zielfunktion ist wächst unbeschräkt (bei Maximierung) bzw. fällt unbeschränkt bei Minimierung.*

Beide Fälle werden durch den lexikographische Simplexalgorithmus erkannt, sofern man einen zulässigen Basispunkt kennt und werden in endlich viel Schritten mit Hilfe des (lexikographischen) Simplexalgorithmus entschieden.

Simplexalgorithmus

Wie findet man einen zulässigen Basispunkt? bzw.
Wie erkennt man, dass der Restriktionsbereich $M = \emptyset$ ist?

Mit der Hilfsaufgabe!

Simplexalgorithmus (Die Hilfsaufgabe)

Sei $x, c \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ b \geq 0,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und

$$(P)\ \max\{\langle c, x\rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0\}\ \text{ eine LOA.}$$

Dann nennt man die LOA

$$(H_P) \quad \min\{\sum_{i=1}^{m} y_i | Ax + E_m y = b, x \geq 0, y \geq 0\}$$

die zu (P) gehörige Hilfsaufgabe.

Simplexalgorithmus (Die Hilfsaufgabe)

- Ein Start-Basispunkt für (H_P) ist immer **leicht** zu finden:

  $x = 0_n,$
  $y = b(\geq 0_m).$

  Nach der Simplexmethode erhalten wir eine Lösung oder stellen die Unlösbarkeit fest. (Unlösbarkeit würde heißen $v = -\infty$, und das kann wegen $v \geq 0$ nicht sein).

- Sei also v der *Extremalwert* der Hilfsaufgabe (H_P) im Basispunkt $(\overline{x}, \overline{y})$.

  1. Fall: $v = 0$.
  Dann gilt $\overline{y}_1 = \cdots = \overline{y}_m = 0$ (da $y_i \geq 0$) und folglich ist $\overline{x}$ in M.

  2. Fall: $v > 0$.
  Dann gilt für jedes $x \in R^n$, dass $A \cdot x < b$ und damit $M = \emptyset$!

  $\Uparrow$
  d.h., dass es mindestens ein x_i
  existiert, so dass $A_i \cdot x < 0$

Beispiel: an der Tafel.

Zusammenfassung

Für jede LOA $(P)\ \max\{\langle c, x\rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0\}$ gilt:

- (eventuell mittels Hilfsaufgabe)
  - kann man **leicht** einen Start-Basispunkt finden oder
  - man stellt fest, dass der Restriktionsbereich der LOA leer ist.
- Ist der Restriktionsbereich nicht leer, so kann nur einer der beiden Fälle eintretten:
  - entweder existiert eine Lösung der Aufgabe, oder
  - oder die LOA ist unlösbar, weil die Zielfunktion wächst unbeschräkt (bei Maximierung) bzw. fällt unbeschränkt bei Minimierung.

Alle Fälle werden in endlich viel Schritten mit Hilfe des (lexikographischen) Simplexalgorithmus entschieden (worste-case: in exponentiell - zu der Dimension der Aufgabe - vielen Schritten).

Dualität

Definition 1.17.
Betrachten wir die LOA

$(P) \qquad \max\{< c, x > \mid A \cdot x \leq b,\ x \geq 0\}.$

Die LOA

$(D) \qquad \min\{< b, y > \mid A^T \cdot y \geq c,\ y \geq 0\}$

heißt die zu (P) *duale Aufgabe*.

Beispiel: an der Tafel.

Bemerkung 1.10.

Sei (P) *eine LOA in Gleichungsform, d.h.*

$$(P) \qquad \max\{< c, x > \mid A \cdot x = b,\ x \geq 0\}.$$

Dann ist die zu (P) *duale Aufgabe die LOA* (D) *mit*

$$(D) \qquad \min\{< b, u > \mid A^T \cdot u \geq c\}.$$

Dualität

Satz 1.18 (Dualitätssatz der linearen Optimierung).
Es seien

(P)*:* $\max\{< c, x > | A \cdot x \leq b,\ x \geq 0\}$ *und*
(D)*:* $\min\{< b, y > | A^T \cdot y \geq c,\ y \geq 0\}$ *mit*

$c, x \in \mathbb{R}^n,\ b, y \in \mathbb{R}^m,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$

Dann gilt:
(P) *ist lösbar genau dann, wenn* (D) *lösbar ist. Im Falle der Lösbarkeit sind die Extremalwerte gleich.*

Beweis: ohne Beweis.

Duale Simplexmethode

Betrachten wir ein erstes Simplextableau:

		x_N
	d_{00}	d_{0N}
x_B	d_{B0}	d_{BN}

Simplexmethode:
Start: $d_{B0} \geq 0$, d_{0N} - beliebig.
Ziel: $d_{0N} \geq 0$ zu konstruieren unter Beibehaltung $d_{B0} \geq 0$.

Duale Simplexmethode:
Start: $d_{0N} \geq 0$, d_{B0} - beliebig.
Ziel: $d_{B0} \geq 0$ zu konstruieren unter Beibehaltung $d_{0N} \geq 0$.

Duale Simplexmethode

- Berechnung des Nachfolgertableaus mittel der dualen Simplexmethode: an der Tafel

- **Beispiel 1.11 (Vergessene Nebenbedingungen).**
  Sei folgendes Simplextableau gegeben:

			NBV	
			x_2	x_4
		4	1	1
BV	x_1	1	-1	1
	x_3	2	2	-2

Offensichtlich ist das Tableau optimal und der Optimale Punkt ist $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (1, 0, 2, 0)^T$.

Sei $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 0$ *eine vergessene Nebenbedingung.*
Was tun? Nachoptimieren mit der dualen Simplexmethode !

Duale Simplexmethode

Beispiel 1.12 (Vergessene Nebenbedingungen - Fortsetzung).

- *BV durch NBV ausdrücken:*

  $$x_1 = 1 - (-x_2 + x_4)$$
  $$x_3 = 2 - (2x_2 - 2x_4).$$

- *Einsetzen in die vergessene Nebenbedingung (VNB)* $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 0$*:*

  Die VNB gilt gdw

  $$1 + x_2 - x_4 + x_2 - 2 + 2x_2 - 2x_4 + x_4 \geq 0$$
  gdw
  $$-1 + 4x_2 - 2x_4 \geq 0$$
  gdw
  $$-1 + 4x_2 - 2x_4 - u = 0 \Leftrightarrow u = -1 - (-4x_2 + 2x_4).$$

- *Damit läßt sich das Simplextableau, wie folgt ergänzen: :*

Duale Simplexmethode

Beispiel 1.13 (Vergessene Nebenbedingungen - Fortsetzung).

			NB	
			x_2	x_4
		4	1	1
BV	x_1	1	-1	1
	x_3	2	2	-2
	u	-1	-4	2

Dieses Tableau ist nicht zulässig, aber dual zulässig, also verwenden wir jetzt die duale Simplexmethode:

			NB	
			u	x_4
		15/4	1/4	3/2
BV	x_1	5/4	-1/4	1/2
	x_3	3/2	1/2	-1
	x_2	1/4	-1/4	-1/2

Dieses Tableau ist optimal!

Definition 1.19 (ILP/MILP).
Sei $c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{mxn}$. Das Problem

$$(P) \quad \max\{\langle c, x\rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0\},$$

wobei $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{Z},\ x_{k+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ heißt

- ein *ganzzahliges Optimierungsproblem (kurz: ILP)*, wenn $k = n$ und
- ein *gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem (kurz: MILP)*, wenn $1 \leq k \leq n-1$ und
- ein LOP, wenn $k = 0$ (wie bereits definiert).

Wir betrachten hier, o.B.d.A., das ILP.

Definition 1.20 (Relaxation).

Sei

$$(P) \quad \max\{\langle c, x\rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n\} \text{ ein ILP}$$

und

$$(P_0) \quad \max\{\langle c, x\rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n\} \text{ ein LOP.}$$

Dann heißt (P_0) eine *Relaxation* von (P).

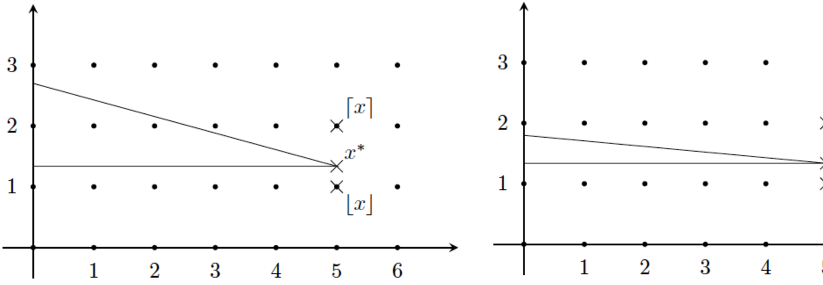
Seien

- $M_0 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ und
- $G := \{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$.

Offenbar gilt, dass $G \subseteq M_0$ und folglich gilt dann auch, dass der optimale (maximale) Wert der ZF der Relaxation (P_0) eine obere Schranke des optimalen Wertes der Zielfunktion des ILP (P) ist.

Ganzzahlige Optimierung (Schnitt-Verfahren)

- Falls ein $x^* \in \mathbb{Z}^n$ existiert, sodass x^* optimal für (P_0) ist, so ist x^* auch für (P) optimal.
  Im Allgemeinen ist $x^* \in \mathbb{R}^n$; man darf nicht runden, denn:



Offensichtlich kann x^* sowohl aufgerundet als auch abgerundet nicht zulässig!
Es kann auch sein, dass der Restriktionsbereich G leer ist, obwohl der Restriktionsbereich M_0 der Relaxation nicht leer ist!

Ganzzahlige Optimierung (Schnitt-Verfahren)

Idee:

- Falls $x^* \notin \mathbb{Z}^n$, fügen wir eine Restriktion $\langle a, x \rangle \leq a_0$ hinzu, die x^* abschneidet, also

$$x^* \notin M_1 := M_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq a_0\}.$$

  Durch diese Restriktion soll aber kein ganzzahliger Punkt von M_0 abgeschnitten werden, d.h. es soll gelten: $G \subseteq M_1$.

- Löse $(P_1) = \max\{\langle c, x \rangle \mid x \in M_1\}$.

Definition 1.21 (Schnitt).

Die Hyperebene $\langle a, x \rangle = a_0$ heißt *Schnittebene* für das Problem (P), bzw. die Restriktion $\langle a, x \rangle \leq a_0$ heißt *Schnitt* für (P).

Wie findet man solche Schnitte?

Gomory-Schnitte

Wir betrachten ILP's mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$!

Ableitung der Gomory-Schnitte: an der Tafel.

Beispiel 1.14.

Löse die ILP

$$(P) \quad \max\{x_2 | 3x_1 + 2x_2 \leq 6, -3x_1 + 2x_2 \leq 0, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Lösung 1.15.

Wir lösen zuerst die Relaxation

$$(P_0) \quad \max\{x_2 | 3x_1 + 2x_2 \leq 6, -3x_1 + 2x_2 \leq 0, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^2\} :$$

			x_1	$x_2 \downarrow$
	z	0	0	-1
	u_1	6	3	2
$\leftarrow$	u_2	0	-3	2

			$x_1 \downarrow$	u_2
	z	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\leftarrow$	u_1	6	6	-1
	x_2	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

		u_1	u_2
z	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_1	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
x_2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Gomory-Schnitte

$\Rightarrow z \notin \mathbb{Z} \rightarrow$ Gomory-Schnitt für z:

$$\left(\frac{1}{4} - \underbrace{\left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor}_{=0}\right) \cdot u_1 + \left(\frac{1}{4} - \underbrace{\left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor}_{=0}\right) \cdot u_2 \geq \frac{3}{2} - \underbrace{\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor}_{=1}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \tfrac{1}{4} u_1 + \tfrac{1}{4} u_2 \geq \tfrac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & u_1 + u_2 \geq 2 \\
\Leftrightarrow \quad & u_1 + u_2 - u_3 = 2 \\
\Leftrightarrow \quad & -u_1 - u_2 + u_3 = -2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nachoptimieren:

		$u_1 \downarrow$	u_2
z	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_1	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
x_2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
u_3	-2	-1	-1

		u_3	$u_2 \downarrow$
z	1	$\frac{1}{4}$	0
x_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	1	$\frac{1}{4}$	0
u_1	2	-1	1

$\Rightarrow x_1 \notin \mathbb{Z} \rightarrow$ Gomory-Schnitt für x_1:

Gomory-Schnitte

$\Rightarrow$ Gomory-Schnitt für x_1:

$$\Bigg(\frac{1}{6} - \underbrace{\left\lfloor \frac{1}{6} \right\rfloor}_{=0}\Bigg) \cdot u_3 + \Bigg(-\frac{1}{3} - \underbrace{\left\lfloor -\frac{1}{3} \right\rfloor}_{=-1}\Bigg) \cdot u_2 \geq \frac{2}{3} - \underbrace{\left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor}_{=0}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{6} u_3 + \frac{2}{3} u_2 \geq \frac{2}{3} \\
\Leftrightarrow \quad & u_3 + 4u_2 \geq 4 \\
\Leftrightarrow \quad & -4u_2 - u_3 + u_4 = -4.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nachoptimieren:

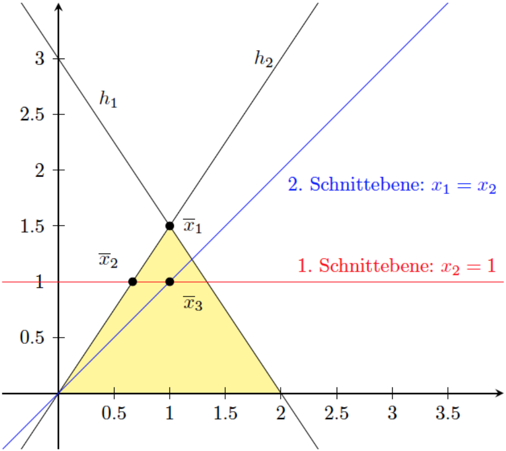
		u_3	$u_2 \downarrow$
z	1	$\frac{1}{4}$	0
x_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	1	$\frac{1}{4}$	0
u_1	2	-1	1
$\leftarrow$ u_4	-4	-1	-4

		u_3	u_4
z	1	$\frac{1}{4}$	0
x_1	1		$-\frac{1}{12}$
x_2	1	$\frac{1}{4}$	0
u_1	1		$\frac{1}{4}$
u_2	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist optimal für das ILP, $\text{ZF}(x^*) = 1$.

Gomory-Schnitte

Graphische Darstellung der Lösungsfindung



$\overline{x}_1$ ist optimal für (P_0)

$\overline{x}_2$ ist optimal nach der ersten Nachoptimierung

$\overline{x}_3$ ist optimal nach der zweiten Nachoptimierung, und ist ganzzahlig, d.h., $\overline{x}_3 = x^*$ und damit optimal für (P).

Satz 1.22 (Endlichkeit des Algorithmus).
Wenn man bei der dualen Simplex-Methode folgendermaßen vorgeht:

(a) *Wähle die erste Zeile mit nicht-ganzzahigem* d_{i0} *aus und*

(b) *Benutze ggf. die lexikographische Version der DSM,*

und das ILP zulässig, d.h. die Zielfunktion nach oben beschränkt ist beim max-ILP bzw. nach unten beschränkt ist beim min-ILP, so berechnet die DSM in endlich vielen Schritten eine ganzzahlige Lösung oder stellt die Unlösbarkeit des ILP fest.

Beweis: **ohne Beweis.**

Ganzzahlige Optimierung (Branch and Bound-Verfahren: Idee)

Gegeben:

- (P) $\max\{\langle c, x\rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n\}$ ein ILP,
- (P_0) $\max\{\langle c, x\rangle \mid A \cdot x = b, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n\}$ eine Relaxation von (P),
- $\tilde{x} \notin \mathbb{Z}^n$ eine Lösung seiner Relaxation (P_0), d.h., es gibt ein $i, 1 \leq i \leq n$ mit $\tilde{x}_i \notin \mathbb{Z}$.

Gesucht:

- $x^* \in \mathbb{Z}^n$ eine Lösung für (P)

Ganzzahlige Optimierung (Branch and Bound-Verfahren: Idee)

- Betrachte die zwei LOAs (P_A) und (P_B) mit
  $(P_A)\quad \max\{\langle c, x\rangle \mid A\cdot x = b, x \geq 0,\ x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor,\ x \in \mathbb{R}^n\}$,
  $(P_B)\quad \max\{\langle c, x\rangle \mid A\cdot x = b, x \leq 0,\ x_i \geq \lceil x_i^* \rceil,\ x \in \mathbb{R}^n\}$ und
  löse deren Relaxationen in $\mathbb{R}^n$.
- Schranken berücksichtigen und Teil-LOAs eliminieren.

Differentialgleichungen

In der Natur treten oft und viele Probleme auf, bei denen sich um Zusammenhänge zwischen den untersuchten Größen und der Geschwindigkeit oder der Beschleunigung (*zeitliche Ableitungen*) und/oder der *räumlichen Ableitungen*, z.B. in der Feldtheorie, handelt .

Mit solchen Problemen beschäftigt man sich in der

- Pysik,
- Chemie,
- Biologie,
- Technik,
- Wirtschaft,
- u.v.m.

Hierbei geht es die Modellierung mittels Differentialgleichungen und die Lösung von Differentialgleichungen.

Die Theorie der Lösung von Differentialgleichungen stellt ein wesentliches Gebiet der angewandten Mathematik dar.

Beispiel 2.1 (Radioaktiver Zerfall: Beweismethode in der Kriminalistik).

Beispiel 2.2 (Gleich den Zucker oder lieber später?).

Beispiel 2.3 (Auslenkung eines Pendels).

Differentialgleichungen

Eine Gleichung, in der eine Variable x und eine gesuchte Funktion $y = y(x)$, sowie deren Ableitungen $y'(x), \ldots y^{(n)}(x)$ bis zur Ordnung n vorkommen, heißt *gewöhnliche Differentialgleichung* *n-ter Ordnung*. Formal:

Differentialgleichungen

Definition 2.1.

- Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $D_F \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$, $n \geq 1$, bzw. $D_G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
  Eine *gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung (kurz: DGL)* ist eine Gleichung für eine gesuchte Funktion $y(x)$ der Form

  $$F(x, y, y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \qquad \text{(implizite Form)},$$

  bzw.

  $$y^{(n)}(x) = G(x, y, y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \qquad \text{(explizite Form)},$$

  wobei $F : D_F \to \mathbb{R}$, bzw. $G : D_G \to \mathbb{R}$ Funktionen sind.

- Wenn für ein $x_0 \in Def(y)$ gelten muss, dass

  $$y_0 = y(x_0),\ y' = y'(x_0),\ \ldots,\ y_0^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}(x_0),$$

  so nennt man diese $(n+1)$ Gleichungen *Anfangsbedingungen*.

- Eine Differentialgleichung mit ihren Anfangsbedingungen nennt man Anfangswertproblem.

Anstatt $y(x)$ bzw. $y^{(i)}(x)$ schreiben wir oft nur y bzw. $y^{(i)}$.

Beispiel 2.4.

1. $F(x, y, y') = y' + 2xy - 2x = 0$,
2. $y' = \frac{x}{y-1}$,
3. $y'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\right)y' = 0$,
4. $y' = -\lambda y$

Die Lösung einer DGL n-ter Ordnung nennt man *allgemein*, falls sie n unabhängige Parameter enthält.

Die Lösung nennt man *vollständig*, falls durch die Parameter alle mögliche Lösungen erfasst werden.

Die Lösung nennt man *speziell* oder *partikulär*, falls sie keine Parameter enthält.

Beispiel: an der Tafel.

Falls nicht anders vereinbart, bezeichnen I bzw. J in diesem Kapitel immer Intervalle in $\mathbb{R}$.

Definition 2.2 (separabel).

Eine Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$ erster Ordnung heißt *separabel* oder *trennbar*, wenn es zwei stetige Funktionen f und g mit $f : I \to \mathbb{R},\ g : J \to \mathbb{R}$ gibt, so dass sie sich in der Form

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

darstellen lässt.

Differentialgleichungen 1.Ordnung

Satz 2.5.
Das Anfangwertproblem $y' = f(x) \cdot g(y)$, *mit den Funktionen* $f : I \to \mathbb{R},\ g : J \to \mathbb{R}$ *und dem Anfangswert* $y(x_0) = y_0 \in J$, $g \neq 0$ *auf* J, *hat eine eindeutige Lösung* y *und es gilt:*

$$y(x) = G^{-1}\big(F(x)\big),$$

wobei $G(y)$ *bzw.* $F(x)$ *die Stammfunktion von* $\frac{1}{g(y)}$ *bzw. von* $f(x)$ *ist. Man erhält die Lösung, in dem man die Gleichung*

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y)} dy = \int\limits_{x_0}^{x} f(x) dx.$$

nach y *auflöst.*

Beweis: an der Tafel.

Beispiel 2.6.
Lösen Sie das Anfangswertproblem:

$$y' = xy - 2y, \ y(1) = 2.$$

Lösung: an der Tafel.

Definition 2.3 (Lineare DGL 1. Ordnung).
Eine DGL der Form

$$y' + a(x) \cdot y = f(x)$$

nennt man *linear*. Dabei sind a und f auf einem Intervall I stetige Funktionen.
Die Funktion $f(x)$ heißt *Störfunktion*.

- Wenn $f(x) \equiv 0$, so heißt die DGL *homogen*,
- anderenfalls heißt sie *inhomogen*

Satz 2.7.
Die lineare DGL

$$y' + a(x) \cdot y = f(x)$$

mit $a : I \to \mathbb{R}$ *und* $f : I \to \mathbb{R}$ *stetige Funkionen besitzt, die vollständige Lösung,*

1. *falls die DGL homogen ist:*

$$y(x) = c \cdot e^{-A(x)},$$

2. *falls die DGL inhomogen ist:*

$$y(x) = \Big(\int f(x) \cdot e^{A(x)} dx + c \Big) e^{-A(x)},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ *und* $A(x)$ *eine Stammfunktion von* $a(x)$ *ist.*

Beweis: an der Tafel.

Bemerkung 2.8.

Ein AWP

$$y' + a(x) \cdot y = f(x) \qquad (*)$$

mit $a : I \to \mathbb{R}$ *und* $f : I \to \mathbb{R}$ *stetige Funkionen und* $x_0 \in I$ *kann gelöst werden, in dem zuerst die allgemeine Lösung der DGL* $(*)$ *berechnet und in dieser Lösung die Werte* x_0 *und* y_0 *ensprechend einsetzt.*

Beispiel 2.9.

1. *Finden Sie die vollständige Lösung der DGL*

$$y' + y \cdot \tan x = \cos x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}].$$

2. *Lösen Sie das Anfangswertproblem:*

$$xy' + 3y = x^3 + 4x, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad y(1) = \frac{1}{6}.$$

Differentialgleichungen 2.Ordnung

Sei $$y'' = f(x, y, y')$$

eine Differentialgleichung 2.Ordnung, bzw. zusammen mit

$$y(x_0) = y_0 \text{ und } y'(x_0) = y_0'$$

ein Anfangswertproblem.

Wir betrachten hier 2 Fälle:

Differentialgleichungen 2.Ordnung

1.Fall: $y'' = f(x)$.

Die vollständige Lösung erhalten nach 2 mal integrieren.

2.Fall: $y'' = f(x, y')$.

Die vollständige Lösung erhalten mittels

- der Substitution $z(x) = y'(x)$.
- Dann erhalten wir aus der gegebenen DGL 2. Ordnung die Gleichung $z' = f(x, z)$, die eine DGL 1. Ordnung ist. Wenn wir diese lösen können, erhalten wir z mit $z(x_0) = y'_0$.
- y berechnen wir durch Integrieren von z.

Beispiel: an der Tafel.

- Wir betrachten die lin. DGL n-ter Ordnung
$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x)$$
mit $a_i(x), f(x) : I \to \mathbb{R}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

- Die Menge der Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$ der entspr. homogenen DGL ist ein Unterraum (Bez. H) des Vektorraums aller reelen Funktionen auf I. Das ist leicht zu überprüfen.

  Eine Basis von H nennt man auch Fundamentalsystem für die DGL.

- Wenn alle $a_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$, so erhalten wir eine DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

- Wir betrachten die homogene lin. DGL

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0 \qquad (*)$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

- Wir betrachten jetzt den Lösungsansatz $e^{\lambda x}$, d.h., $y(x) = e^{\lambda x}$. Folglich gilt noch: $y' = \lambda e^{\lambda x}, \ \ldots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$.
- Wir erhalten

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \ldots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = 0.$$

- Das Polynom

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

heißt das charakteristische Polynom der DGL $(*)$.

Aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms kann man ein Fundamentalsystem für $(*)$ konstruieren:

Fall 1: Ist λ eine einfache reelle Nullstelle, so ist $e^{\lambda x}$ eine Lösung von $(*)$.

Fall 2: Ist $\lambda = \alpha + i\beta$ eine einfache komplexe Nullstelle, so sind $e^{\alpha x} \cos \beta x$ und $e^{\alpha x} \sin \beta x$ zwei Lösungen von $(*)$.

Achtung! Mit $\alpha + i\beta$ ist auch $\alpha - i\beta$ auch eine Nullstelle, die aber keine neue lin. unabhängige Lösungen liefert.

Fall 3: Ist λ eine k-fache reelle Nullstelle, so sind $x^i e^{\lambda x}, i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ k lin. unabh. Lösungen von $(*)$.

Fall 3: Ist $\lambda = \alpha + i\beta$ eine k-fache komplexe Nullstelle, so sind $x^i e^{\alpha x} \cos \beta x$ und $x^i e^{\alpha x} \sin \beta x$ mit $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ $2k$ lin. unabh. Lösungen von $(*)$.

Beweis : Ohne.

Beispiel 2.10.

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für folgende DGL:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Lösung 2.11.

Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

d.h.,

$$(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Die Nullstellen sind, folglich, $\lambda_{1,2} = 1$ *und damit bilden die Lösungen* e^x *und* xe^x *ein Fundamentalsystem für die betrachtete DGL.*

Die inhomogene lin. DGL

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = f(x), f(x) \not\equiv 0$$

ist i.a. nicht analytisch lösbar.
In vielen speziellen Fallen kann man jedoch eine Lösung finden.

ANHANG

Definitionen

Definition 3.1 (Verknüpfung).

Seien M_1, M_2, M_3 drei nichtleere Mengen.

- Eine *Verknüpfung* $\circ$ *von* $M_1 \times M_2$ *in* M_3 ist eine Abbildung von $M_1 \times M_2$ in M_3, d.h.

$$\circ : M_1 \times M_2 \to M_3.$$

- Falls $M_1 = M_2 = M_3 =: M$ ist, dann nennt man die Verknüpfung $\circ$ *abgeschlossen* bzw. eine Verknüpfung auf M.
- Wir nennen $(M, \circ)$ eine algebraische Struktur, falls $\circ$ abgeschlossen auf M ist.

Definitionen

Definition 3.2 (Halbgruppe).

Eine algebraische Struktur $(M, \circ)$ heißt *Halbgruppe*, falls die Veknüpfung $\circ$ assoziativ ist, d.h.

$$\text{für alle } a, b \text{ und } c \text{ gilt: } a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

Beispiele für Halbgruppen

- $(\mathbb{N}, +)$
- $(\mathbb{N}, \cdot)$
- $(\mathbb{Z}, +)$
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$
- $(\mathbb{R}, +)$
- $(\mathbb{R}, \cdot)$
- Sei $M := \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und sei $\circ$ wie folgt definiert:

$\circ$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Definitionen

Definition 3.3 (neutrales Element).

Sei $(M, \circ)$ eine algebraische Struktur und $e \in M$. Das Element e heißt ein *neutrales Element*, falls gilt:

$$e \circ a = a \circ e = a \text{ für alle } a \in M.$$

Definition 3.4 (inverses Element).

Sei $(M, \circ)$ eine algebraische Struktur mit einem neutralen Element e und sei $a \in M$. Das Element $b \in M$ heißt ein *inverses Element* von a, falls gilt:

$$a \circ b = b \circ a = e.$$

Bemerkung 3.1.

- *Das neutrale Element einer algebraischen Struktur ist eindeutig bestimmt.*
- *Das inverse Element eines Elements in einer algebraischen Struktur ist eindeutig bestimmt.*

Definitionen

Definition 3.5 (Monoid).

Die algebraische Struktur $(M, \circ)$ heißt ein *Monoid*, falls gilt:

- $(M, \circ)$ ist eine Halbgruppe und
- $(M, \circ)$ hat ein neutrales Element.

Definition 3.6 (Gruppe).

Die algebraische Struktur $(M, \circ)$ heißt ein *Gruppe*, falls gilt:

- $(M, \circ)$ ist ein Monoid und
- jedes Element a von M besitzt ein inverses Element bzgl. $\circ$ in M.

Beispiele für HalbgGruppen

- $(\mathbb{N}, +)$
- $(\mathbb{N}, \cdot)$
- $(\mathbb{Z}, +)$
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$
- $(\mathbb{R}, +)$
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
- Sei $M := \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und sei $\circ$ wie folgt definiert:

$\circ$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Definition 3.7 (kommutativ).

Eine algebraische Struktur $(M, \circ)$ heißt *kommutativ*, falls gilt:

$$a \circ b = b \circ a \text{ für alle } a, b \in M.$$

Bemerkung 3.2.

Kommutative Halbgruppen und Gruppen nennt man auch **abelsch***.*

Beispiel für eine nicht-kommutative Halbgruppe

- Sei $M := \{0, 1, 2\}$ und sei $\circ$ wie folgt definiert:

$\circ$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2

Dabei sei die Verknüpfung $\circ$ von $M \times M$.
Es gilt z.B.: $2 \circ 1 = 2 \neq 1 = 1 \circ 2$.

Definitionen

Definition 3.8 (Verband).

Die Struktur $(M, \circ, \bullet)$ heißt ein Verband, falls gilt:

- $(M, \circ)$ und $(M, \bullet)$ sind abelsche Halbgruppen,
- für $\circ$ und $\bullet$ gelten die Absorptionsgesetze, d.h. für alle drei Elementea, b und c aus M gilt:

$$a \circ (b \bullet a) = a \text{ und } a \bullet (b \circ a) = a.$$

Beispiel

1. $(\mathbb{N}^+, ggT, kgV)$ ist ein Verband.
2. Sei A eine beliebige Menge und $\wp(A)$ ihre Potenzmenge. Dann ist $(\wp(A), \cup, \cap)$ ein Verband.

Definition 3.9 (Ring).

Die Struktur $(M, \circ, \bullet)$ heißt ein Ring, falls gilt:

- $(M, \circ)$ ist eine abelsche Gruppe,
- $(M, \bullet)$ ist eine Halbgruppe,
- für $\circ$ und $\bullet$ gilt die Distributivität, d.h. für alle drei Elemente a, b und c aus M gilt:
$$\begin{aligned} & (a \circ b) \bullet c = (a \bullet c) \circ (b \bullet c) \\ \text{und} \quad & a \bullet (b \circ c) = (a \bullet b) \circ (a \bullet c). \end{aligned}$$

Bemerkung 3.3.

Falls die Verknüpfung $\bullet$ in dem Ring $(M, \circ, \bullet)$ kommutativ ist, so nennt man den Ring kommutativ.

Definition 3.10 (Körper).

Die Struktur $(M, \circ, \bullet)$ heißt ein Körper, falls gilt:

- $(M, \circ)$ ist eine abelsche Gruppe mit e_1 als Neutralelement,
- $(M \setminus \{e_1\}, \bullet)$ ist eine abelsche Gruppe mit Neutralelement e_2,
- für $\circ$ und $\bullet$ gilt die Distributivität, d.h. für alle drei Elemente a, b und c aus M gilt:

$$\begin{aligned} & (a \circ b) \bullet c = (a \bullet c) \circ (b \bullet c) \\ \text{und} \quad & a \bullet (b \circ c) = (a \bullet b) \circ (a \bullet c). \end{aligned}$$

Beispiele

- Ring:
  - $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, kommutativ
  - $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, kommutativ
  - $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, kommutativ
  - $(M, +, \cdot)$, nicht-kommutativ, wobei $M := \{A \mid A \in \mathbb{R}(n, n)\}$ die Menge alle quadratischen Matrizen mit n Zeilen/Spalten und reellen Zahlen als Elemente ist.
- kein Ring
  - $(\mathbb{N}, +, \cdot)$

Beispiele

- Körper:
  -
  - $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
  - $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
  -
- kein Körper
  - $(\mathbb{N}, +, \cdot)$
  - $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
  - $(M, +, \cdot)$

Bemerkung 3.4.

- *Für Ringe und Körper bezeichnet man oft die erste Verknüpfung mit $+$ (anstatt $\circ$) und die zweite Verknüpfung mit $\cdot$ (anstatt $\bullet$).*
- *Das Neutralelement e_1 wird auch* **Nullelement** *des Rings/Körpers genannt und wird oft mit* $\mathbf{0}$ *bezeichnet.*
- *Das Neutralelement e_2 wird auch* **Einselement** *des Körpers genannt und wird oft mit* $\mathbf{1}$ *bezeichnet.*
- *Das inverse Element eines Elements a bzgl. $+$ bezeichnet man auch mit $-a$.*
- *Das inverse Element eines Elements a bzgl. $\cdot$ bezeichnet man auch mit a^{-1}.*

Definitionen

Definition 3.11 (Vektorraum).
Sei $(K, +_K, \cdot_K)$ ein Körper mit $\mathbf{0}_K$ als Nullelement und $\mathbf{1}_K$ als Einselement. Die Struktur $(V, \oplus, \diamond)$ heißt ein Vektorraum über dem Körper K, falls gilt:

- $(V, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe mit $\mathbf{0}_V$ als neutrales Element,
- $\diamond$ ist eine Verknüpfung von $K \times V$ in V, d.h. $\diamond : K \times V \to V$ für die gilt:
  - $\mathbf{1}_k \diamond v = v$ für jedes Element $v \in V$,
  - $(m +_K n) \diamond v = (m \diamond v) \oplus (n \diamond v)$ für alle $m, n \in K, v \in V$,
  - $(m \cdot_K n) \diamond v = m \diamond (n \diamond v)$ für alle $m, n \in K, v \in V$, und
  - $m \diamond (w \oplus v) = (m \diamond v) \oplus (m \diamond w)$ für alle $m \in K, w, v \in V$.

Beispiele

Sei $n \in \mathbb{N}^+$.

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ist ein VR über dem Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
- $(K^n, +_K, \cdot_K)$ ist ein VR über dem Körper $(K, +_K, \cdot_K)$, komponentenweise für $n \geq 2$ verknüpfen.
- Sei $(V, \oplus, \diamond)$ ein beliebiger VR über dem Körper $(K, +_K, \cdot_K)$ und $D \neq \emptyset$ eine beliebige nichtleere Menge.
  Sei $V^D := \{f \mid f : D \to V\}$ und
  - für alle $f, g \in V^D$ sei $(f + g)(x) := f(x) \oplus g(x)$ für jedes $x \in D$ und
  - $(k \cdot f)(x) := k \diamond f(x)$ für alle $x \in D$.

  Dann ist $(V^D, +, \cdot)$ ein VR über dem Körper $(K, +_K, \cdot_K)$, $(V^D, +, \cdot)$ heißt auch Funktionenraum.

Zusammenfassung

M - Menge, • - abg. Verknüpfung auf M

• ass.

(M,•) - HG $\xrightarrow{\text{• komm.}}$ **abelsche HG**

neutrales El.

(M,•) - Monoid

inverse Elemente

(M,•) - Gruppe $\xrightarrow{\text{• komm.}}$ **abelsche Gruppe**

(M,∘) - abelsche Gr.
(M,•) - HG
} + Distr.

(M,∘,•) - Ring

(M \ {e1},•) - abelsche Gruppe

(M,∘,•) - Körper

(M,∘,•) Körper mit 0 und 1
(V,⊕) - ab. Gr.
+ Regeln für ⊛

(V,⊕, ⊛) - VR über (M,∘,•)

(M,∘) - abelsche HG
(M,•) - abelsche HG
} + Abs.

(M,∘,•) - Verband