1 Der duale Simplexalgorithmus

Simplexalgorithmus:

Start: Mit einem ersten Tableau mit $d_{B0} \geq 0$.

Ziel: Tableau mit $d_{0N} \geq 0$ so zu konstruieren, dass $d_{B0} \geq 0$ beibehalten bleibt:

		x_N
	d_{00}	d_{0N}
x_B	d_{B0}	d_{BN}

Dualer Simplexalgorithmus:

Start: Mit Tableau, in dem $d_{0N} \geq 0$, aber d_{B0} i.a. nicht-nichtnegativ.
Ziel: Tableau mit $d_{B0} \geq 0$ so zu konstruieren, dass $d_{0N} \geq 0$ beibehalten bleibt.

Wie und warum funktioniert der duale Simplexalgoritmus?

Antwort:

			NBV	
			x_k	x_q
		d_{00}	d_{0k}	d_{0q}
BV	x_i	d_{i0}	d_{ik}	d_{iq}
	x_p	d_{p0}	d_{pk}	d_{pq}

Sei $d_{0k}, d_{0q} \geq 0$ für alle $k \in N$, d.h. ein dual zulässiges Tableau liegt vor.
Sei $d_{p0} < 0$. Dann ist, o.B.d.A., die $p-te$ Zeile die Pivotzeile.
Das Pivot-Element in Zeile p wird derart gewählt, daß $d_{pq} < 0$ ist.

- Dadurch wird sichergestellt, daß das neue Element an der Stelle von d_{p0} (d.h. $\tilde{d}_{q0}$) positiv wird.
- Außerdem wird dadurch gesichert, daß

  $$\tilde{d}_{00} = d_{00} - \frac{\overbrace{d_{0q}}^{>0}\,\overbrace{d_{p0}}^{<0}}{\underbrace{d_{pq}}_{<0}} < d_{00},$$

  d.h. **monoton fallendes** Verhalten der Zielfunktion von einem Tableau zum nächsten (und damit kein Zyklus).
- Wenn $d_{pk} \geq 0$ für alle $k \in N$, dann ist die Aufgabe unlösbar, weil der Restriktionsbereich leer ist!!!
- Anderenfalls betrachten wir alle $k \in N$ mit $d_{pk} < 0$. Wie ist q unter diesen k zu wählen?
  - Das neue Element $\tilde{d}_{0p}$ in der charakteristischen Zeile anstelle von d_{0q} muß nichtnegativ sein:

    $$\tilde{d}_{0p} = -\frac{\overbrace{d_0 q}^{>0}}{\underbrace{d_{pq}}_{<0}} > 0$$

– Restliche Elemente der charakteristischen Zeile sind:

$$\tilde{d}_{0k} = \underbrace{d_{0k}}_{>0} - \frac{\overbrace{d_{0q}}^{>0}\ d_{pk}}{\underbrace{d_{pq}}_{<0}} \geq 0 \qquad (*)$$

Interessant ist der Fall, bei dem gilt:

$$\frac{\overbrace{d_{0q}}^{>0}\ d_{pk}}{\underbrace{d_{pq}}_{<0}} > 0,$$

sonst ist $(*)$ trivial erfüllt.
Damit muß gelten: $d_{pk} < 0$. In diesem Fall erhält die Bedingung $(*)$ die Form:

$$d_{0k} - \frac{d_{0q}\,|d_{pk}|}{|d_{pq}|} \geq 0, \text{ d.h.}$$

$$\frac{d_{0k}}{|d_{pk}|} \geq \frac{d_{0q}}{|d_{pq}|} \qquad \forall k \in N \text{ mit } d_{pk} < 0.$$

Somit q ist so zu wählen unter den $k \in N$ mit $d_{pk} < 0$, dass

$$\frac{d_{0q}}{|d_{pq}|} = \min_k \frac{d_{0k}}{|d_{pk}|}.$$

□