Spieltheoretischer Ansatz für selbstorganisierende Systeme

Alexander Musidlowski

Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik

27. Juni 2006

Inhaltsverzeichnis

Ziel des Aufsatzes

Ziel

Die Autoren wollen eine effiziente Methode entwickeln, die Anzahl der evolutionär stabilen Strategien (ESS) in einem Spiel zu bestimmen.

Geschichte der Spieltheorie

- einzelne Aspekte schon im 18. Jahrhundert und früher angewendet
- bekannte Wissenschaftler haben „nur“ Antworten für spezielle Fragestellungen gefunden
- erste allgemeine Ansätze durch Johann von Neumann 1928
- Durchbruch erst 1944 mit dem Buch „Theory of Games and Economic Behavior“
- mehrere Nobelpreise in diesem Gebiet, zuletzt 2005 für Robert Aumann und Thomas Schelling

Geschichte der Spieltheorie

- einzelne Aspekte schon im 18. Jahrhundert und früher angewendet
- bekannte Wissenschaftler haben „nur“ Antworten für spezielle Fragestellungen gefunden
- erste allgemeine Ansätze durch Johann von Neumann 1928
- Durchbruch erst 1944 mit dem Buch „Theory of Games and Economic Behavior“
- mehrere Nobelpreise in diesem Gebiet, zuletzt 2005 für Robert Aumann und Thomas Schelling

Geschichte der Spieltheorie

- einzelne Aspekte schon im 18. Jahrhundert und früher angewendet
- bekannte Wissenschaftler haben „nur“ Antworten für spezielle Fragestellungen gefunden
- erste allgemeine Ansätze durch Johann von Neumann 1928
- Durchbruch erst 1944 mit dem Buch „Theory of Games and Economic Behavior“
- mehrere Nobelpreise in diesem Gebiet, zuletzt 2005 für Robert Aumann und Thomas Schelling

Geschichte der Spieltheorie

- einzelne Aspekte schon im 18. Jahrhundert und früher angewendet
- bekannte Wissenschaftler haben „nur“ Antworten für spezielle Fragestellungen gefunden
- erste allgemeine Ansätze durch Johann von Neumann 1928
- Durchbruch erst 1944 mit dem Buch „Theory of Games and Economic Behavior“
- mehrere Nobelpreise in diesem Gebiet, zuletzt 2005 für Robert Aumann und Thomas Schelling

Geschichte der Spieltheorie

- einzelne Aspekte schon im 18. Jahrhundert und früher angewendet
- bekannte Wissenschaftler haben „nur" Antworten für spezielle Fragestellungen gefunden
- erste allgemeine Ansätze durch Johann von Neumann 1928
- Durchbruch erst 1944 mit dem Buch „Theory of Games and Economic Behavior"
- mehrere Nobelpreise in diesem Gebiet, zuletzt 2005 für Robert Aumann und Thomas Schelling

Allgemein

- ist eine Theorie der sozialen Interaktion
- das Ergebnis ist nicht nur von der eigenen Entscheidung abhängig
- man muss das Verhalten seiner Umwelt einkalkulieren
- die grundsätzliche Frage ist, welche Entscheidung soll ich treffen

Allgemein

- ist eine Theorie der sozialen Interaktion
- das Ergebnis ist nicht nur von der eigenen Entscheidung abhängig
- man muss das Verhalten seiner Umwelt einkalkulieren
- die grundsätzliche Frage ist, welche Entscheidung soll ich treffen

Allgemein

- ist eine Theorie der sozialen Interaktion
- das Ergebnis ist nicht nur von der eigenen Entscheidung abhängig
- man muss das Verhalten seiner Umwelt einkalkulieren
- die grundsätzliche Frage ist, welche Entscheidung soll ich treffen

Allgemein

- ist eine Theorie der sozialen Interaktion
- das Ergebnis ist nicht nur von der eigenen Entscheidung abhängig
- man muss das Verhalten seiner Umwelt einkalkulieren
- die grundsätzliche Frage ist, welche Entscheidung soll ich treffen

Definition

Prof. Dr. Rieck

The subject of game theory are decision situations, in which the outcome for a decision maker does not only depend on his own decisions, but also on the behavior of other decision makers. Game theory is thus a theory of **social interaction**.

Begriffe

		Spieler A	
		Strategie 1	Strategie 2
Spieler B	Strategie 1	(0,0)	(0,0)
	Strategie 2	(0,1)	(2,2)

Tabelle: strategisches Spiel

Begriffe

strategisches Spiel

Die Spieler vertreten ihre Interessen und üben somit Einfluss auf das Ergebnis aus.

Gewinnmatrix

Die Gewinnmatrix drückt die Präferenzen der Spieler aus. Diese dürfen sich während des Spiels nicht verändern. Jeder Spieler versucht seinen Gewinn zu maximieren.

Begriffe

strategisches Spiel

Die Spieler vertreten ihre Interessen und üben somit Einfluss auf das Ergebnis aus.

Gewinnmatrix

Die Gewinnmatrix drückt die Präferenzen der Spieler aus. Diese dürfen sich während des Spiels nicht verändern. Jeder Spieler versucht seinen Gewinn zu maximieren.

Begriffe

Rationalität

Die Rationalität ist ein zentraler Gedanke, eine Grundvoraussetzung für das Spiel in dem Modell der Spieltheorie.

Experiment

1. Publikum in zwei Gruppen teilen
2. in Gruppe A erhält jeder 10 Euro
3. A muss das Geld mit einer Person aus B teilen
4. die Person aus Gruppe B kann entscheiden, ob er den Betrag annimmt oder aussschlägt
5. wenn B ausschlägt, muss A den Gewinn wieder zurückgeben

Experiment

1. Publikum in zwei Gruppen teilen
2. in Gruppe A erhält jeder 10 Euro
3. A muss das Geld mit einer Person aus B teilen
4. die Person aus Gruppe B kann entscheiden, ob er den Betrag annimmt oder aussschlägt
5. wenn B ausschlägt, muss A den Gewinn wieder zurückgeben

Experiment

1. Publikum in zwei Gruppen teilen
2. in Gruppe A erhält jeder 10 Euro
3. A muss das Geld mit einer Person aus B teilen
4. die Person aus Gruppe B kann entscheiden, ob er den Betrag annimmt oder aussschlägt
5. wenn B ausschlägt, muss A den Gewinn wieder zurückgeben

Experiment

1. Publikum in zwei Gruppen teilen
2. in Gruppe A erhält jeder 10 Euro
3. A muss das Geld mit einer Person aus B teilen
4. die Person aus Gruppe B kann entscheiden, ob er den Betrag annimmt oder aussschlägt
5. wenn B ausschlägt, muss A den Gewinn wieder zurückgeben

Auswertung

- Wieviel Geld hat A B gegeben?
- Hat B angenommen?

Auflösung

Auflösung

Wenn beide Spieler vollkommen rational sind, dann hätte A B einen Cent geben müssen.

Begriffe

mathematische Beschreibung

	Strategien	
	einfach	gemischt
Spieler	$i \in I = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$	
Strategiemenge	$S_i = \{s_{i,1}, \cdots, s_{i,m_i}\}$	Δ_i
Strategie	s_i	x_i
Konfiguration	$s = (s_1, \cdots, s_n)$	x
Konfigurationsraum	S	Δ
Gewinn eines Spielers	$\pi_i(s)$	$u_i(x)$
Gewinn aller Spieler	$\pi(s)$	$u(x)$

Tabelle: mathematische Beschreibung

Begriffe

mathematische Beschreibung

	Strategien	
	einfach	gemischt
Spieler	$i \in I = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$	
Strategiemenge	$S_i = \{s_{i,1}, \cdots, s_{i,m_i}\}$	Δ_i
Strategie	s_i	x_i
Konfiguration	$s = (s_1, \cdots, s_n)$	x
Konfigurationsraum	S	Δ
Gewinn eines Spielers	$\pi_i(s)$	$u_i(x)$
Gewinn aller Spieler	$\pi(s)$	$u(x)$

Tabelle: mathematische Beschreibung

Begriffe

mathematische Beschreibung

	Strategien	
	einfach	gemischt
Spieler	$i \in I = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$	
Strategiemenge	$S_i = \{s_{i,1}, \cdots, s_{i,m_i}\}$	Δ_i
Strategie	s_i	x_i
Konfiguration	$s = (s_1, \cdots, s_n)$	x
Konfigurationsraum	S	Δ
Gewinn eines Spielers	$\pi_i(s)$	$u_i(x)$
Gewinn aller Spieler	$\pi(s)$	$u(x)$

Tabelle: mathematische Beschreibung

Begriffe

mathematische Beschreibung

	Strategien	
	einfach	gemischt
Spieler	$i \in I = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$	
Strategiemenge	$S_i = \{s_{i,1}, \cdots, s_{i,m_i}\}$	Δ_i
Strategie	s_i	x_i
Konfiguration	$s = (s_1, \cdots, s_n)$	x
Konfigurationsraum	S	Δ
Gewinn eines Spielers	$\pi_i(s)$	$u_i(x)$
Gewinn aller Spieler	$\pi(s)$	$u(x)$

Tabelle: mathematische Beschreibung

Begriffe

mathematische Beschreibung

	Strategien	
	einfach	gemischt
Spieler	$i \in I = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$	
Strategiemenge	$S_i = \{s_{i,1}, \cdots, s_{i,m_i}\}$	Δ_i
Strategie	s_i	x_i
Konfiguration	$s = (s_1, \cdots, s_n)$	x
Konfigurationsraum	S	Δ
Gewinn eines Spielers	$\pi_i(s)$	$u_i(x)$
Gewinn aller Spieler	$\pi(s)$	$u(x)$

Tabelle: mathematische Beschreibung

Begriffe

mathematische Beschreibung

	Strategien	
	einfach	gemischt
Spieler	$i \in I = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$	
Strategiemenge	$S_i = \{s_{i,1}, \cdots, s_{i,m_i}\}$	Δ_i
Strategie	s_i	x_i
Konfiguration	$s = (s_1, \cdots, s_n)$	x
Konfigurationsraum	S	Δ
Gewinn eines Spielers	$\pi_i(s)$	$u_i(x)$
Gewinn aller Spieler	$\pi(s)$	$u(x)$

Tabelle: mathematische Beschreibung

Begriffe

mathematische Beschreibung

	Strategien	
	einfach	gemischt
Spieler	$i \in I = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$	
Strategiemenge	$S_i = \{s_{i,1}, \cdots, s_{i,m_i}\}$	Δ_i
Strategie	s_i	x_i
Konfiguration	$s = (s_1, \cdots, s_n)$	x
Konfigurationsraum	S	Δ
Gewinn eines Spielers	$\pi_i(s)$	$u_i(x)$
Gewinn aller Spieler	$\pi(s)$	$u(x)$

Tabelle: mathematische Beschreibung

Begriffe

- ein Spiel wird beschrieben durch $\Gamma = (I, S, \pi)$

Begriffe

- jede reine Strategie s erhält eine Wahrscheinlichkeit mit der sie gespielt wird
- ein gemischte Strategie ist eine Kombination von reinen Strategien

Begriffe

- jede reine Strategie s erhält eine Wahrscheinlichkeit mit der sie gespielt wird
- ein gemischte Strategie ist eine Kombination von reinen Strategien

Lösungskonzepte

- es gibt eine Reihe von Konzepten zur Lösung von Spielen, einige wichtige folgen

dominante Strategien

Die Auszahlung der dominanten Strategie ist größer als für eine andere Strategie, unabhängig von der Strategie des Gegners.

best response

Eine beste Antwort von einem Spieler i auf eine Konfiguration $y \in \Delta$ ist jedes Element aus der Menge

$$B_i(y) \equiv arg \max_{x_i \in \Delta_i} \{u_i(x_i, y_{-i})\}$$

Lösungskonzepte

- es gibt eine Reihe von Konzepten zur Lösung von Spielen, einige wichtige folgen

dominante Strategien

Die Auszahlung der dominanten Strategie ist größer als für eine andere Strategie, unabhängig von der Strategie des Gegners.

best response

Eine beste Antwort von einem Spieler i auf eine Konfiguration $y \in \Delta$ ist jedes Element aus der Menge

$$B_i(y) \equiv arg \max_{x_i \in \Delta_i} \{u_i(x_i, y_{-i})\}$$

Lösungskonzepte

- es gibt eine Reihe von Konzepten zur Lösung von Spielen, einige wichtige folgen

dominante Strategien

Die Auszahlung der dominanten Strategie ist größer als für eine andere Strategie, unabhängig von der Strategie des Gegners.

best response

Eine beste Antwort von einem Spieler i auf eine Konfiguration $y \in \Delta$ ist jedes Element aus der Menge

$$B_i(y) \equiv arg \max_{x_i \in \Delta_i} \{u_i(x_i, y_{-i})\}$$

Lösungskonzepte

Nashgleichgewicht (NGG)

Ein Nashgleichgewicht ist eine gemischte Konfiguration $y \in \Delta$, welches die beste Antwort zu sich selbst ist. Das heißt:

$$\forall i \in I, y_i \in B_i(y)$$

Oder anders ausgedrückt: In einem Nashgleichgewicht (NGG) gibt es für keinen der Spieler einen Anreiz davon abzuweichen.

Allgemein

- viele kleine Spiele über die Zeit hinweg
- gute Strategien durch Lernprozess (Trial-Error) herausfinden
- typisch sind Populationen
- zwei Individuen treffen aufeinander und spielen dann ein Spiel

Allgemein

- Strategien mit hohem Gewinn breiten sich über gesamte Population aus
- evolutionäre Spiele erzeugen dynamische Prozess
- wegen des Lernprozesses findet eine Änderung der Strategie über die Zeit statt
- EST ist die Studie dieser Dynamik

symmetrische 2-Spieler-Spiele

Zur Vereinfachung und besseren Darstellung beschränken wir uns auf symmetrische und strategische 2-Spieler-Spiele.

		Student 1	
		Fussball	Informatik
Student 2	Fussball	(1,1)	(0,0)
	Informatik	(0,0)	(5,5)

Tabelle: symmetrisches 2-Spieler-Spiel

support

support

Der *support* einer gemischten Strategie $x_1 \in \Delta_1$ ist die Menge der möglichen Strategien von Spieler 1, welche keine Wahrscheinlichkeit von 0 in x_1 haben. Oder formell,

$$\forall i \in \{1, 2\}, supp(x_i) \equiv \{j \in S_i : x_i(j) > 0\}$$

extended support

extended support

Der *extended support* einer gemischten Strategie $x_2 \in \Delta_2$ von Spieler 2 ist die Menge von reinen besten Antworten von Spieler 1 zu x_2. Formell,

$$extsupp(x_2) \equiv \left\{ j \in S_1 : u_1(j, x_2) \in \max_{x_1 \in \Delta_1} \{u_1(x_1, x_2)\} \right\}$$

evolutionär stabile Strategien (ESS)

- gegeben sei eine Population mit der kooperativen Strategie x
- eine Gruppe von betrügerische Eindringlingen spielt y
- $u(x, z) > u(y, z)$
- $z = (1 - \epsilon)x + \epsilon y$

evolutionär stabile Strategien (ESS)

Wenn x eine ESS ist und komplett gemischt ($supp(x) = S$), dann ist dies die einzige ESS in dem Spiel. (Heigh 1975)

„Schere, Stein, Papier“

	Papier	Schere	Stein
Papier	0	-1	1
Schere	1	0	-1
Stein	-1	1	0

Tabelle: Das Kinderspiel „Schere, Stein, Papier“

$$\text{ESS} = x_i = \frac{1}{3}$$

„Schere, Stein, Papier“

	Papier	Schere	Stein
Papier	0	-1	1
Schere	1	0	-1
Stein	-1	1	0

Tabelle: Das Kinderspiel „Schere, Stein, Papier“

$$\text{ESS} = x_i = \frac{1}{3}$$

Das Theorem

ESS=NGG?

$$\mathbb{E}\{\#ESS\} = o(\mathbb{E}\{\#SymmetrischerNashgleichgewichte\})$$

Das Ergebnis

ESS=NGG!

$$\mathbb{E}\{\#ESS\} = \frac{exp(0{,}281644n+\mathcal{O}(\log n))}{2^{0{,}315915n}}$$

Das Problem

- nicht jedes Spiel hat eine ESS

$$\Pi = \begin{bmatrix} (1,1) & (2,-2) & (-2,2) \\ (-2,2) & (1,1) & (2,-2) \\ (2,-2) & (-2,2) & (1,1) \end{bmatrix}$$

Das Problem

- Können wir entscheiden, ob eine ESS existiert oder nicht?
- Wenn eine ESS existiert, können wir sie dann in polynomialer Zeit approximieren?

Die Entscheidungsprobleme liegen in $\mathcal{NP} - complete$ und in $co - \mathcal{NP} - complete$

Das Problem

- Können wir entscheiden, ob eine ESS existiert oder nicht?
- Wenn eine ESS existiert, können wir sie dann in polynomialer Zeit approximieren?

Die Entscheidungsprobleme liegen in $\mathcal{NP} - complete$ und in $co - \mathcal{NP} - complete$

Quellen & Literatur

- Spyros Kontogiannis, Paul Spirakis *„Evolutionary Games: An algorithmic View“*
- *Professor Rieck's Spieltheorie-Seite*
  `www.spieltheorie.de`
- Dr. Louchka Popova-Zeugmann *„Lineare Optimierung“*
  `www2.informatik.hu-berlin.de/%7Epopova/geheim/LinOpt-2006.pdf` [kennwortgeschützt]

Quellen & Literatur

- Prof. Dr. Christian Schade *„Vorlesung Entrepreneurial Decision Making“*
  Internet: http://enim.wiwi.hu-berlin.de/Lehre/DIPLOM/Lehre/Homepage
- Wikipedia *diverse Artikel*
  Internet: http://de.wikipedia.org/wiki/Evolution%C3%A4r_stabile_Strategie
  http://de.wikipedia.org/wiki/Braess-Paradoxon
  http://de.wikipedia.org/wiki/Chicken_Game

Quellen & Literatur

Wikipedia *diverse Artikel - Fortsetzung*
http://de.wikipedia.org/wiki/Ultimatumspiel
http://de.wikipedia.org/wiki/Gefangenendilemma
http://de.wikipedia.org/wiki/Spieltheorie
http://en.wikipedia.org/wiki/Support_%28mathematics%29