Cantor'sches Diagonalverfahren

Von Mengen, Unendlichkeiten und Wahnsinn

Von
Daniel Schliebner

„Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher
so tief das Gemüt der Menschen bewegt;
das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf
den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt;
das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig."
David Hilbert (*1862 - †1943)

Herausgabe: 14. Dezember 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **2**

2 Ausflug in die Mengenlehre **3**
2.1 Einführung . . . 3
2.2 Der Mengenbegriff . . . 3
2.3 Teilmengen . . . 3
2.4 Abbildungen . . . 4
2.5 Weitere Begriffe aus der Mengenlehre . . . 4

3 Unendlichkeit **5**
3.1 Einführung . . . 5
3.2 Was ist Unendlichkeit? . . . 6
3.2.1 Hilberts Hotel . . . 6
3.3 Mengenrelationen für unendliche Mengen . . . 6
3.4 Abzählbar unendliche Mengen . . . 7

4 1. Cantor'sches Diagonalverfahren **8**
4.1 Einführung . . . 8
4.2 1. Diagonalargument - $\mathbb{Q}$ ist abzählbar . . . 8

5 2. Cantor'sches Diagonalverfahren **10**
5.1 Einführung . . . 10
5.2 Vorüberlegungen - überabzählbare Mengen . . . 10
5.3 2. Diagonalargument - $\mathbb{R}$ ist überabzählbar . . . 11

6 3. Cantor'sches Diagonalverfahren **14**
6.1 Einführung . . . 14
6.2 Vorbetrachung: Teilmengen endlicher Mengen . . . 14
6.3 3. Diagonalargument - $P(M) > M$ . . . 15

7 Folgen und Probleme **17**
7.1 Auftretende Probleme . . . 17
7.2 Weitere Folgen . . . 17

A Beweise und Lösungen **18**
A.1 Übung (i): Element aus unendlicher Menge entfernen . . . 18
A.2 Übung (ii): . . . 18
A.3 Übung (iii): Teilmengen endlicher Mengen . . . 18
A.4 Hilberts Hotel . . . 19
A.5 Beweis von Cantors 3. Diagonalargument anhand eines Beispiels 19

B Georg Cantor **20**

Literaturverzeichnis **22**

Kapitel 1

Einführung

Als Einführung soll ein kleines Beispiel dienen. Dieses Beispiel ist eines der klassischsten Einführungsbeispiele in die Welt der Paradoxa der Mathematik, da möchte ich es Ihnen hier natürlich nicht vorenthalten.

Man denke sich ein kleines idyllisches Dörfchen, indem es noch nach mittelalterlichem Stil üblich ist, sich nicht selbst zu rasieren, sondern zu einem sog. Barbier zu gehen und ihm die Arbeit zu überlassen. Dieser Barbier folgt dem logischen Grundprinzip, all jene zu rasieren, die sich nicht selber rasieren können oder wollen. Eines Tages sitzt der Barbier in seinem bescheidenen Häuschen, als ihm plötzlich eine Frage durch den Kopf schießt, auf die er keine Antwort findet. Er denkt sich folgendes: „Wenn ich alle Personen hier rasiere, die sich nicht selber rasieren - rasiere *ich* mich dann selber oder *nicht*?“.

Bevor Sie weiterlesen, denken Sie einmal darüber nach!

Nun gut - betrachten wir einmal die möglichen Antworten: Lautet die Antwort **ja** (der Barbier rasiert sich selber), ist daraus nur der Schluss zu ziehen, dass er sich nicht selber rasiert, denn er rasiert ja nur diejenigen, die sich nicht selber rasieren. Folglich muss die Antwort **nein** lauten. Ist dies jedoch so, würde daraus folgen, dass er sich gearade selbst rasiert (er rasiert ja alle die sich nicht selber rasieren). Habe ich Sie verwirrt? Keine Sorge - fassen wir nochmals zusammen:

- Aus „Ja“ (er rasiert sich) folgt zwingend „Nein“ (er rasiert sich nicht)
- Aus „Nein“ (er rasiert sich nicht) folgt zwingend „Ja“ (er rasiert sich)

Eine *„Unmöglichkeit in Gestalt einer Paradoxie“* (aus [1]). Diese Paradoxie trägt den Namen Russelsches Paradoxon oder Russelsche Antinomie und wurde vom Philosophen Bertrand Russel (*1872 - †1970) formuliert. Das Prinzip, bei dem dieses Paradoxon auftritt, besteht in der Bildung der „Menge aller Mengen“ die im Verlauf unserer Reise durch die Welt des Unendlichen noch eine wichtige Rolle zugeschrieben bekommen wird.

Welche Fragen stellen sich, wenn wir über Unendlichkeiten nachdenken und was ist Unendlichkeit eigentlich? Gibt es verschiedene Unendlichkeiten oder nur eine? Auf diese Fragen finden wir mit Sicherheit noch Antworten...

Daniel Schliebner — Berlin, den 14. Dezember 2003

Kapitel 2

Ausflug in die Mengenlehre

2.1 Einführung

Bevor wir uns in die Unendlichkeit stürzen, brauchen wir vorerst das Grundverständnis einiger Begriffe aus der Mengenlehre. Die (naive) Mengenlehre geht auf den russischen Mathematiker Georg Cantor zurück. Er gilt als der Schöpfer der Mengenlehre und begründete den strukturellen Aufbau der Mathematik. Die von Cantor 1874 publizierte Arbeit in einem renommierten Journal galt als Geburtsstunde der Mengenlehre. Auf Cantor und seine Geschichte werde ich noch zur Genüge eingehen. Wichtig ist jedoch: Hier werden lediglich jene Grundlagen, die für das Verständnis der darauf folgenden Lektüre unabdingabar sind, erwähnt. Vorerst also ein paar Begriffsklärungen...

2.2 Der Mengenbegriff

Definition *(Begriff der Menge nach Cantor.)*

> Unter einer „Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.

2.3 Teilmengen

Definition *(Teilmengen)*

> Seien A und B zwei Mengen.
> *(i)* A ist Teilmenge von B (A $\subseteq$ B), falls: $\forall\ x \in A$ gilt $x \in B$
> *(ii)* A ist echte Teilmenge von B (A $\subset$ B), falls gilt: $A \subseteq B \wedge A \neq B$)

2.4 Abbildungen

Definition *(Abbildung)*

> Seien A und B Mengen. Eine *Abbildung* A nach B ist eine Vorschrift, durch die jedem $a \in A$ genau ein Element $f(a) \in B$ zugeordnet wird. Man schreibt: $f : A \to B$. Häufig ist es sinnvoll die Zuordnung eines $a \in A$ zu seinem *Bildpunkt* $f(b)$ zu kennzeichnen. Man schreibt: $a \mapsto f(a)$.

Definition *(injektiv, surjektiv und bijektiv)*

> Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt *injektiv*, wenn keine zwei Elemente von A auf dasselbe Element von B abgebildet werden, sie heißt *surjektiv*, wenn für jedes Element $b \in B$ ein $a \in A$ existiert, sodass $b = f(a)$ gilt und sie heißt schließlich *bijektiv* wenn sie *injektiv* und *surjektiv* ist.

Um diese Eigenschaften etwas verständlicher auszudrücken, möchte ich Fraenkel (1959) zitieren: „ Wird jedem Element m einer Menge M ein einziges Element n einer Menge N zugeordnet, so spricht man von einer eindeutigen Zuordnung von Elementen aus N zu den Elementen von M [...], wenn n den Vater von m bedeutet [gemeint ist hier die Injektion]. Ist aber die Zuordnung überdies auch eindeutig in der umgekehrten Richtung, d.h. entpricht jedem n ein einziges m, wie es z.B. für [...] Ehemann und Ehefrau in einer monogamen [Beziehung] zutrifft [gemeint ist hier die Surjektion], so heißt die Zuordnung eindeutig [sie ist bijektiv].“ (aus [3]).

2.5 Weitere Begriffe aus der Mengenlehre

Definition *(Mächtigkeit oder Kardinalität)*

> Die *Kardinalität* oder *Mächtigkeit* einer Menge M gibt die Anzahl ihrer Elemente an. Symbolik: „$|M|$“.

Beispiel: Sei $M = \{7, \pi \text{ Schinken }, 17\}$. Dann ist $|M| = 4$.

Definition *(Potenzmenge)*

> Sei M eine Menge. Dann ist die Potenzmenge von M, in Zeichen $P(M)$, die Menge aller Teilmengen von M: $P(M) = \{A | A \subseteq M\}$.

Beispiel: Sei $M = \{x\}$. Dann ist $P(M) = \{\emptyset, \{x\}\}$.

Kapitel 3

Unendlichkeit

3.1 Einführung

Nachdem wir diese sehr (die Betonung liegt hier auf „sehr“) theoretischen Grunddefinitionen hinter uns haben, kommen wir nun zum interessanteren - und zugleich gefährlicheren Teil. Gefährlich? Keine Angst - ich verwende dieses Wort nur, weil man beim Denken im Unendlichen schnell den Faden verlieren kann; manche jedoch führt die Unendlichkeit in die Psychiatrie. Von wem ich rede? Natürlich von einer **der** Personen aus der Mathematik, dem Begründer der naiven Mengenlehre - Georg Cantor. Ja - ganz richtig, Cantor verbrachte die letzten Stunden seines Lebens in einer Klinik für Geisteskranke in Halle. Nähreres zu seiner Person jedoch im Anhang B.

Das Zitat von Hilbert am Anfang dieses Skriptes leitet ein, was ich nun ansatzweise versuche nahe zu bringen. Welche Rolle spielt das Unendliche? Wie „bewegt“ man sich in diesem neuen Gebiet? Betrachten Sie einmal folgende Beispiele die ich [1] entnommen habe:

Nehmen Sie einmal die Ausdehnung des uns bekannten Universums. Dessen Radius beträgt 10^{28} Zentimeter - eine unvorstellbare Größe zwar - aber Sie ist trotzdem *endlich*! Was kann es „größeres“ geben, als den Radius des Universums? Ein weiteres Beispiel: Seit dem Urknall sind nicht bedeutend mehr als 6×10^{17} Sekunden vergangen - eine Zahl mit „nur“ 18 Stellen, ja wir können sie sogar in Worte fassen: Sechstrillionen Sekunden. Und weil es gerade solchen Spaß macht noch ein weiteres Beispiel: Die **gesamte Anzahl** (wir gehen jetzt aufs Ganze) der Elementarteilchen dürfte kaum bedeutend größer sein als 10^{80}!

Generell war die Unendlichkeit lange Zeit in der Mathematik verhasst - ja es gab sogar Versuche sie ganz zu vermeiden. Das Ergebnis jedoch war „ein unüberschaubarer, schwerfälliger Formalismus“ (aus [1]). Lange wurde auch der Vergleich von unendlichen Größen gescheut, denn 1638 erkannte z.B. Galilei, dass es genauso viele Quadratzahlen gibt, wie es natürliche Zahlen gibt, denn jeder Quadratzahl ist eindeutig eine natürliche Zahl zugeordnet und umgekehrt, sodass folgt, dass es genauso viele Quadrat-, wie natürliche Zahlen gibt. Diese Erkenntnis jedoch stand im Konflikt mit der Tatsache, dass die Quadratzahlen im Endlichen betrachtet immer weiter auseinander liegen, je weiter man voranschreitet. Da es niemand wagte bzw. schaffte diesen Widerspruch zu erklären blieb die Antwort lange aus. Nachfolgend führe ich Sie nun in die Erkenntnisse Cantors ein und Sie werden sehen: Alles nimmt Formen an - das Unendliche offenbart sich Ihnen, je mehr Sie von Cantors genialen Erkenntnissen verstehen.

3.2 Was ist Unendlichkeit?

Es ist vorerst wichtig festzustellen, dass das Wort „Unendlich“ ein adjektiv ist. Es muss sich folglich auf etwas beziehen. In der Mathematik beziehen sich Endlichkeit und Unendlichkeit auf Objekte, die wir Mengen nennen. Eine Definition der Unendlichkeit geht auf Dedekind (*1831 - †1916) zurück:

Definition *(Unendlichkeit, Dedekind)*

> Sei M eine Menge. M heißt *unendlich*, falls es eine echte Teilmenge N von M gibt, die sich bijektiv auf M abbilden lässt, d.h. es gilt $N \subset M$ mit $|N| = |M|$.
> Sie heißt *endlich*, falls sie nicht unendlich ist.

Anmerkung: Für den Beweis für die Unendlichkeit von Mengen gibt es einen Versuch von Dedekind. Er soll hier jedoch nicht von näherem Interesse sein.

Übung (i). Zeige: Nimmt man ein Element aus einer unendlichen Menge, so ist diese wieder unendlich.

3.2.1 Hilberts Hotel

Eine interessante Spielerei mit dem Unendlichen stellt Hilberts Hotel dar, benannt nach dem Mathematiker David Hilbert. Es gibt etliche, aber endliche (Achtung Mathematikerhumor!) Beispiele für Hilberts Hotel, wir wollen zwei betrachten:

1. Hilberts Hotel habe unendlich viele Räume. Alle Räume sind belegt. Nun kommt ein neuer Gast und möchte ein Zimmer in dem Hotel haben. Ist es möglich ihn in endlicher Zeit unterzubringen?

2. Man stelle sich das gleiche Hotel vor, mit dem Unterschied, dass nun unendlich viele Gäste ankommen. Ist es wiederum möglich, sie in endlicher Zeit unterzubringen?

Die Auflösungen sind im Anhang zu finden.

3.3 Mengenrelationen für unendliche Mengen

Betrachten wir uns vorerst endliche Mengen. Denken Sie sich zwei Haufen mit Wallnüssen. Der erste Haufen sei mit H_1 bezeichnet und der zweite Haufen mit H_2. Wie findet ein Kleinkind, sagen wir 4 Jahre alt, heraus, welcher Haufen mehr Nüsse enthält, wenn es noch nicht zählen kann? Ganz einfach: es trägt paarweise von jedem Haufen eine Nuss ab, bis es zu einem der folgenden Fälle kommen **muss**:

- Es bleiben Nüsse bei H_1 liegen, woraus folgt: $|H_1| > |H_2|$
- Es bleiben Nüsse bei H_2 liegen, woraus folgt: $|H_2| > |H_1|$
- Beide Haufen sind vollständig abgetragen, woraus folgt: $|H_2| = |H_1|$

Das Problem bei unendlichen Mengen besteht nun darin, dass der Prozess des „Abtragens“ unendlich lange dauern würde - die Möglichkeit scheint absurd. Ich behaupte nun aber: Es geht doch! Hierzu stellen wir folgende Überlegung an: Man stelle sich einen Nusshaufen und einen Eierhaufen vor. Man möchte überprüfen, welcher Haufen von größerer Mächtigkeit ist. Das paarweise Abtragen der Nüsse und der Eier wie oben ist im Endeffekt nichts weiter, als dass wir jedem Ei eine Nuss zuordnen. Können wir am Ende einem Ei keine Nuss mehr zuordnen oder umgekehrt, so ist eben entweder der Eier- oder der Nusshaufen von größerer Mächtigkeit. Geht die Zuteilung genau auf, sind die Haufen gleichmächtig. Mit diesen praktischen Erkenntnissen, wagen wir uns nun an die Definitionen:

Definition *(Gleiche Mächtigkeit)*

Seien A,B Mengen. A ist *gleichmächtig* zu B, in Zeichen $|A| = |B|$, wenn gilt: $\exists\ f : A \overset{bij.}{\to} B$.

Definition *(Strikt kleinere Mächtigkeiten)*

Seien A,B Mengen. A ist von *echt kleinerer Mächtigkeit* wie B, in Zeichen $|A| < |B|$, wenn gilt: $\exists\ f : A \overset{inj.}{\to} B$ und $|A| \neq |B|$.

Also: $|A| < |B| \;\; \Leftrightarrow$ „Es existiert eine Injektion von A nach B aber keine Bijektion von A nach B“.

Bemerkung *(Äquivalenz)*

Seien M,N zwei Mengen. Dann schreiben wir fortan für $|M| = |N|$: $M \sim N$. In Worten: M äquivalent N.

Mit der Theorie ist es nun fasst geschafft. Essenziell ist lediglich noch folgender Abschnitt.

3.4 Abzählbar unendliche Mengen

Ein Erwachsener würde bei endlichen Nusshaufen auch die Möglichkeit des Durchzählens nutzen - doch auf den ersten Blick scheint auch dieser Prozess bei unendlichen Mengen unendlich lange zu dauern. Das Prinzip besteht hier darin, jeder Nuss der Reihe nach eine natürliche Zahl zuzuordnen. Daher führen wir den Begriff „abzählbarer“ Mengen ein:

Definition *(Abzählbare Mengen)*

Sei M eine Menge. M heißt abzählbar, falls gilt:
(i) M ist endlich, oder
(ii) es existiert ein $f : \mathbb{N} \overset{bij.}{\to} M$.

Cantor bezeichnete die Kardinalität von $\mathbb{N}$ als $\aleph_0$ (sprich: „Aleph null“) unter anderem deshalb, weil gilt: M unendlich. $\nexists\ M : \ |M| < \aleph_0$.

Beweis. Siehe in [4], S.328. □

Um zu zeigen, dass eine Menge die gleiche Kardinalität hat, müssen wir dank obiger Definition nur noch die entsprechende Menge in eine eindeutige (bijektive) Zuordnung zu den natürlichen Zahlen stellen.

Beflügelt von diesen neuen Erkenntnissen, kommen wir nun im nächsten Kapitel endlich zu den Diagonalverfahren Cantors. Wir werden unter anderem Mengen kennen lernen, welche die gleiche Mächtigkeit haben, wie $\mathbb{N}$.

Kapitel 4

1. Cantor'sches Diagonalverfahren

4.1 Einführung

Aus dem vorherigen Kapitel stellen sich uns nun mehrere Fragen: Welche Mengen sind den natürlichen Zahlen gleichmächtig? Wie kann ich diese Mengen „abzählen"? Außerdem: Eine Frage stellt sich dem aufmerksamen Leser noch: Existieren auch überabzählbare Mengen? D.h. gibt es Mengen, die eine größere Kardinalität aufweisen können, als die natürlichen Zahlen? Wie soll das jedoch gehen? Gibt es etwa mehr als eine Unendlichkeit? Diese Fragen werden schließlich auch beantwortet werden. Folgen Sie einfach den einschlägigen Argumentationen Cantors und lassen sie sich noch tiefer in die Welt des Transfiniten (Unendlichen) einführen!

4.2 1. Diagonalargument - $\mathbb{Q}$ ist abzählbar

Wie der Titel dieses Abschnittes bereits suggeriert, ist es jetzt das Ziel, eine Möglichkeit zu finden, zu zeigen, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich ist. Erinnern wir uns nochmal an unsere Definition abzählbarer Mengen. Aus eben dieser müssen wir Folgendes zeigen:

$$\exists \ f : \mathbb{N} \stackrel{bij.}{\to} \mathbb{Q}$$

Die Frage ist: Welche Abbildungsvorschrift ermöglicht es jeden Bruch nach endlich vielen Schritten zu erreichen?

Betrachten wir einmal folgende Abbildung:

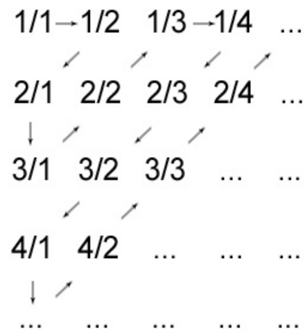

Abbildung 4.1: 1. Cantor'sches Diagonalverfahren

Wählten wir die Variante, erst alle Brüche mit dem Zähler eins, dann mit dem Zähler zwei usw. durchzuprobieren, bräuchten wir für jeden Zähler unendlich viele Schritte - dieser Weg führt also nicht zum Ziel. Wie die Abbildung 4.1 allerdings bereits andeutet, existiert ein Weg, in endlich vielen Schritten jeden beliebigen Bruch zu erreichen. Hierzu listen wir die Brüche so auf, dass die Spalten den Zähler vorgeben und die Zeilen den Nenner. Nun können wir diese so durchzählen, dass wir in endlich vielen Schritten *jeden* Bruch auffinden können! In der Abbildung geben die Pfeile diese Vorschrift vor: Man beginnt mit dem Glied a_{11} dann folgt $a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, \ldots$, wobei der erste Index die Zeile und der zweite die Spalte in der Abb. 4.1 angibt. Wir haben also eine eindeutige Zuordnung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}^+$ gefunden. Mit $\mathbb{Q}^-$ können wir nun genauso verfahren, indem wir einfach die Liste dahingehend erweitern, dass wir jedem positiven Bruch seinen entsprechenden negativen Bruch nebenher schreiben, wir erhalten somit eine Vorschrift folgender Art: $1 \leftrightarrow 0,\ 2 \leftrightarrow \frac{1}{1},\ 3 \leftrightarrow -\frac{1}{1},\ 4 \leftrightarrow \frac{2}{1},\ 5 \leftrightarrow -\frac{2}{1}, \ldots, \ldots$. Wir haben also bewiesen:

Satz *(Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ - Cantors 1. Diagonalargument)*

Sei $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen. Dann ist $\mathbb{Q}$ abzählbar,
d.h.: $\exists\ f : \mathbb{N} \overset{bij.}{\to} \mathbb{Q}$.

Vielleicht ahnen Sie, wie aufregend es Cantor empfunden haben muss zu entdecken, dass es *gleich viele rationale Zahlen, wie natürliche Zahlen gibt*! Und vor allem wie belustigend es gewesen sein muss, solche Zuordnungen zwischen Mengen zu entdecken. Im Konflikt mit seinen neuen Erkenntnissen standen die „mathematischen Halbgötter" (vgl. [4], S.303); im Zuge dessen sind Aristoteles, Gauß und vor allem Kronecker zu nennen. Kronecker war ein Zeitgenosse Cantors und Vertreter der konstruktiven Mathematik, welche unter anderem behauptet, dass es keine mathematischen Objekte gibt, die sich nicht aus den natürlichen Zahlen konstruieren lassen - ein krasser Widerspurch zu Cantors neuen Erkenntnissen!

Eine Zahl $z \in \mathbb{R}$ heißt *algebraisch*, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit natürlichem Exponenten und rationalen Koeffizienten ist.

Weitere abzählbar unendliche Mengen sind z.B. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{A}$ (Menge der algebraischen Zahlen).

Kapitel 5

2. Cantor'sches Diagonalverfahren

5.1 Einführung

Im vorherigen Kapitel haben wir gesehen, dass noch einige weitere bekannte Mengen abzählbar unendlich sind, d.h. die gleiche Kardinalïtät haben, wie $\mathbb{N}$. Cantor fand es mit Sicherheit äußerst amüsant solche Zuordnungen zu finden und somit wieder eine weitere Menge in seine Liste der abzählbaren Mengen aufzunehmen. Nach den bisher besprochenen Mengen fehlt nun die als nächstes folgende - $\mathbb{R}$. Nun, auch an diese Menge wagte sich Cantor, beflügelt von seinen bisherigen Errungenschaften; in einem am 29. November 1873 verfassten Brief von Cantor an Dedekind (*1831-†1916) - sie waren seit 1872 gut befreundet - steht jedoch Folgendes geschrieben:

„[...] so sehr ich mich auch zu der Ansicht neige, daß $\mathbb{N}$ *und* $\mathbb{R}$ *keine eindeutige Zuordnung gestatten, so kann ich doch den Grund nicht finden [..]"* (aus [3], S.80).

Und an dieser Stelle stellt sich uns die Frage - wie sie sich auch Cantor stellte - nach sog. überabzählbaren Mengen, d.h. Mengen, welche eine größere Mächtigkeit als $\mathbb{N}$ besitzen.

5.2 Vorüberlegungen - überabzählbare Mengen

Aus der Definition abzählbarer Mengen folgt die Definition überabzählbarer Mengen:

Definition *(Überabzählbare Mengen)*

Sei M eine Menge. M heißt überabzählbar, falls M nicht abzählbar ist.

Folgende Aussagen sind äquivalent:
(i) M ist überabzählbar.
(ii) $\neg(|M| \leq |\mathbb{N}|)$, d.h. $\nexists\ f : M \overset{inj.}{\rightarrow} \mathbb{N}$.
(iii) $\nexists\ f : \mathbb{N} \overset{surj.}{\rightarrow} M$.
(iv) $|\mathbb{N}| < |M|$.

5.3 2. Diagonalargument - $\mathbb{R}$ ist überabzählbar

Soweit - so gut! Jetzt setzen wir alle unsere gewonnenen Kenntnisse ein, um nach obiger Definition zu zeigen:

> **Satz** *(Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ - Cantors 2. Diagonalargument)*
>
> Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Dann ist $\mathbb{R}$ überabzählbar,
> d.h.: $\nexists\, f \;:\; \mathbb{N} \overset{bij.}{\to} \mathbb{R}$.

Beweis. Wie so oft besteht unsere Beweisstrategie darin, eine zur Annahme widerspüchliche Aussage ad absurdum zu führen. Ausgehend von Cantors Taktik betrachten wir zunächst das Einheitsintervall $(0;1)$. Wir nehmen also an, dass sich alle reellen Zahlen in diesem Intervall den natürlichen Zahlen zuordnen lassen, d.h. wie im ersten Diagonalverfahren erhalten wir eine Zuordnungsliste, derart, dass sie **alle** reellen Zahlen in $(0;1)$ enthält:

$$
\begin{array}{l}
x_1 = 0,\, \mathbf{a_{11}}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14}\, a_{15}\, a_{16}\, a_{17} \ldots \\
x_2 = 0,\, a_{21}\, \mathbf{a_{22}}\, a_{23}\, a_{24}\, a_{25}\, a_{26}\, a_{27} \ldots \\
x_3 = 0,\, a_{31}\, a_{32}\, \mathbf{a_{33}}\, a_{34}\, a_{35}\, a_{36}\, a_{37} \ldots \\
x_4 = 0,\, a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\, \mathbf{a_{44}}\, a_{45}\, a_{46}\, a_{47} \ldots \\
x_5 = 0,\, a_{51}\, a_{52}\, a_{53}\, a_{54}\, \mathbf{a_{55}}\, a_{56}\, a_{57} \ldots \\
x_6 = 0,\, a_{61}\, a_{62}\, a_{63}\, a_{64}\, a_{65}\, \mathbf{a_{66}}\, a_{67} \ldots \\
x_7 = 0,\, a_{71}\, a_{72}\, a_{73}\, a_{74}\, a_{75}\, a_{76}\, \mathbf{a_{77}} \ldots \\
\vdots \\
x_n = 0,\, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3}\, a_{n4}\, a_{n5}\, a_{n6}\, a_{n7} \ldots \\
\vdots
\end{array}
$$

Abbildung 5.1: 2. Cantor'sches Diagonalverfahren

Nun konstruieren wir eine Zahl

$$b_n = \begin{cases} 1 & , falls\ a_{nn} = 0 \\ 0 & , falls\ a_{nn} \neq 0 \end{cases}$$

In obiger Abbildung wird das Diagonalargument deutlich. Denn wir haben uns nun eine Zahl b_n konstruiert, welche per definitionem **nicht** in der Liste enthalten sein kann, denn unsere konstruierte Zahl unterscheidet sich von jeder Zahl in der Liste dahingehend, dass es in ihr nach Konstruktion mindestens eine Dezimalstelle gibt, welche nicht in der Zahl der Liste enthalten ist (sie unterscheidet sich von der ersten Zahl mindestens in der ersten Dezimalstelle, von der zweiten in der zweiten Dezimalstelle usw.). Wir haben unsere Annahme, die Liste enthalte alle reellen Zahlen in $(0;1)$ folglich zu einem Widerspruch geführt, also gezeigt:

$$\nexists\, f \;:\; \mathbb{N} \overset{bij.}{\to} (0;1)$$

□

So subtil uns dieser Beweis auch erscheinen mag, er stößt eine neue Tür in die Welt der Unendlichkeiten auf. Um es noch einmal deutlich zu machen: Zwischen den Zahlen 0 und 1 existieren *mehr* reelle Zahlen als es natürliche überhaupt gibt!

Wie dem auch sei, machen wir uns weiter an die Arbeit, denn es ist ja noch zu zeigen, dass aus $\nexists f : \mathbb{N} \overset{bij.}{\rightarrow} (0;1)$ auch folgt, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. Hierzu stellen wir uns vorerst folgende eindeutige Zuordnung zwischen dem Intervall $[0;1]$ und $[0;2]$ vor:

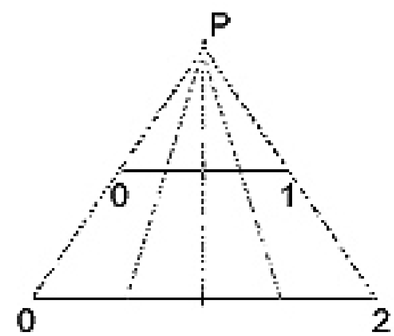

Abbildung 5.2: Eindeutige Zuordnung von $(0;1) \to (0;2)$. P heißt das Perspektivitätszentrum.

Bei dieser Zuordnung deckt sich z.B. der Mittelpunkt von $[0;1]$ (gerade $\frac{1}{2}$) mit dem von $[0;2]$. Diese Deckung finden wir bei jedem Wert aus $[0;1]$. Aufgrund dieser Eindeutigen Zuordnung zwischen den beiden Intervallen, können wir schließen, dass das Intervall $(0;2)$ dem Einheitsintervall gleichmächtig ist. Diese Zurodnung können wir für jedes beliebig kleine bzw. große Intervall finden (vorrausgesetzt das Intervall ist endlich!). Betrachten wir uns nun die gesamte reelle Zahlengerade. Unser oben aufgeführter Versuch kann hier so nicht angewendet werden, denn es existieren ja keine Anfangs- und Endpunkte. Doch hier hilft uns wieder der mathematische Einfallsreichstum:

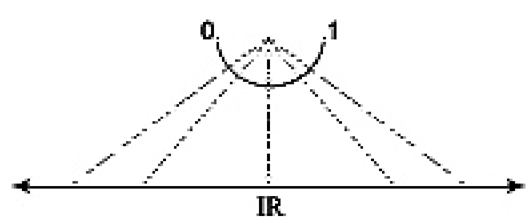

Abbildung 5.3: Eindeutige Zuordnung von $(0;1) \to \mathbb{R}$.

Wir krümmen das Intervall $(0;1)$. Unter diesem Halbkreis laufen nun alle reellen Zahlen, d.h. jede reelle Zahl ist genau einer Zahl zwischen $(0;1)$ zugeordnet und umgekehrt. Wir haben also gezeigt, dass es eine bijektive Abbildung von jedem Teilintervall der reellen Zahlen auf die reellen Zahlen selber gibt, d.h. jedes Teilintervall der reellen Zahlen ist gleichmächtig zu den reellen Zahlen selber!

□

Daher:

Korollar *(Jedes Teilintervall von $\mathbb{R}$ ist überabzählbar)*

> Seien x,y $\in \mathbb{R}$, $x < y$.
> Dann ist $(x; y)$ überabzählbar.

Satz *(Jedes Teilintervall von $\mathbb{R}$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$)*

> Seien a,b $\in \mathbb{R}$, $a < b$.
> Dann gilt: $|\mathbb{R}| = |(a; b)|$.

Übung (ii). Sei $M = (0; 1)$ und $N = \mathbb{R}$. Man zeige $M \overset{bij.}{\to} N$ durch Angabe einer Zuordnungsvorschrift. *Hinweis:* Man verwende den natürlichen Logarithmus.

Weitere überabzählbare Mengen sind z.B. $\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} |$ „x ist irrational“ $\}$ und $\mathbb{T}$ (transzendente Zahlen).

Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt transzendent, wenn sie nicht algebraisch ist (z.B. π).

Kapitel 6

3. Cantor'sches Diagonalverfahren

6.1 Einführung

Nachdem wir festgestellt haben, dass es verschiedene Unendlichkeiten gibt, betrachten wir uns nun ausgehend von den endlichen Mengen die Potenzmenge einer Menge. Bevor wir uns jedoch mit dieser Frage in die Unendlichkeit wagen, machen wir zuvor den Schritt zurück in die Endlichkeit.

6.2 Vorbetrachung: Teilmengen endlicher Mengen

Würden wir uns einige endliche Mengen skizzieren (wie in 2.4) und daraus die Menge aller Teilmengen bilden, kämen wir zu der Vermutung, dass **jede** endliche Menge mit n Elementen 2^n Teilmengen besitzt. Diese Vermutung soll natülich nicht unbewiesen bleiben! Das jedoch bleibt Ihre Aufgabe.

Übung (iii). Beweise per Induktion. Jede endliche n-elementige Menge besitzt genau 2^n Teilmengen.

Wir stellen nun fest, dass die Potenzmenge jeder endlichen n-Elementigen Menge stets von größerer Mächtigkeit ist, als die Menge selber. Sie besitzt gerade $(2^n - n)$ Elemente mehr. Daraufhin stellt sich uns nun die Frage: Lässt sich dieser Schluss auch für unendliche Mengen ziehen?

6.3 3. Diagonalargument - $P(M) > M$

1874 veröffentlich Cantor seine Arbeit - unter anderem mit diesem unglaublichen Satz:

Satz *(Satz über die Potenzmengenoperation - Cantors 3. Diagonalargument)*

Sei A eine Menge und $P(A)$ die Potenzmenge von A.
Dann gilt: $|A| < |P(A)|$.

Der Beweis ist anfangs eventuell nicht einfach zu verstehen. Das nachfolgende Beispiel soll ihn jedoch verstänlicher machen.

Beweis. Wir führen die Annahme

$$\begin{array}{rcl} \exists\ f : A & \stackrel{bij.}{\to} & P(A) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

ad absurdum. Vorerst stellen wir fest: Nach Annahme wird jedes x eindeutig einem $f(x)$ zugeordnet. Entweder ist nun x Element aus $f(x)$ oder es ist es nicht. Z.B. könnte dies so aussehen:

Element aus A	**Element aus** $P(A)$
k	$f(k) = \{a, b, c\}$
t	$f(t) = \{i, j, t, k\}$

Nun sei $Y = \{y \mid y \in A \wedge y \notin f(y)\}$ - oder in Worten: „Y sei die Menge aller y welche nicht Element der ihr zugeordneten Menge aus $P(A)$ sind.“

Nach Annahme müsste $Y = f(w)$ ein w aus A zugeordnet sein. Wie in vorheriger Überlegung existieren nun zwei Möglichkeiten:

1. $w \in f(w)$
2. $w \notin f(w)$

Und nun kommen wir zum Widerspurch, denn: Aus Fall (1) folgt unweigerlich, dass w nicht in $f(w)$ liegt, denn es ist dann ja Element einer Menge, die w entält (eben Y). Aus Fall (2) jedoch folgt, dass w gerade in Y liegen muss, denn Y ist ja definiert, als die Menge **aller** Elemente, die nicht in ihrer zugeordneten Menge enthalten sind. Kurz gefasst erhalten wir also folgendes Paradoxon:

- $w \in f(w) \to w \notin f(w)$
- $w \notin f(w) \to w \in f(w)$

□

Anfangs ist dies sicherlich schwer zu durchblicken. Deshalb finden Sie im Anhang einen Beweis als Geschichte. Die Konstruktion von Y lässt sich ebenfalls als Diagonalisierung auffassen (vgl. [3] S. 103), wodurch der Name zu erklären ist.

Das oben gewonnene Wissen kommt einem Dammbruch gleich, denn dadurch können wir schließen, dass es unendlich viele Unendlichkeiten gibt - der Wahsinn nimmt seinen Lauf. Wüsste Kronecker davon würde er sich im Grabe herumdrehen - unendlich viele Male. Aber im Ernst: Diese Entdeckung stoß auf harte Kritik anderer Mathematiker. Jedoch nicht nur diese Entdeckung ließ andere Mathematiker an der von Cantor geschaffenen Mengenlehre zweifeln. Vor allem durch das von Russel entdeckte Paradoxon - er Menge aller Mengen - geriet Cantors Arbeit stark in die Kritik und es stellte sich die Frage ob Cantors Entdeckungen nun verworfen werden konnten, wo sie doch zu Widersprüchen führten? Dahingehend möchte ich im letzten Kapitel weitere Überlegungen und Folgen der Entdeckungen Cantors nennen.

Kapitel 7

Folgen und Probleme

7.1 Auftretende Probleme

Die Probleme häuften sich. Beginnend damit, dass Cesare Burali-Forti ein Paradox in Cantors Mengenlehre entdeckte, fanden sich immer mehr Probleme. So fand Cantor selbst ein weiteres Paradox und letztendlich entdeckte Russel noch das schon erwähnte Paradox der „Menge aller Mengen“. Durch harte Kritiken seiner Zeitgenossen und der Angst, dass alle Arbeit nichtig war, fiel Cantor in tiefe Depressionen.

Der Weg aus dieser Misere führte über die Axiomatisierung der Mengenlehre. Als Erster machte sich Ernst Zermelo (*1871-†1953) daran die von Cantor gewonnenen Kenntnisse zu axiomatisieren. Dieses Axiomensystem wird als ZFC-System (Zermelo-Fraenkel-Axiom) bezeichnet.

7.2 Weitere Folgen

Cantors weiterführende Überlegungen beschäftigten sich unter anderem mit den Ordinalzahlen.

In den oben behandelten Kapiteln haben wir festgestellt, dass $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ gilt. In diesem Zusammenhang stellt sich uns die Frage, *um wieviel größer* als $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ist. Das Problem wird Kontinuumshypothese genannt, man kann sie so formulieren:

Kontinuumshypothese (CH)

> Sei K eine Menge. Dann gilt:
> $\nexists\ K : |\mathbb{N}| < |K| < |\mathbb{R}|$

Das Problem wurde von Hilbert auf Platz 23 seiner Jahrundertprobleme gestellt und wurde bis heute noch nicht vollständig bewiesen.

Weitere interessante Erkenntnisse sind z.B.:

- $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$
- $\mathbb{R} \sim P(\mathbb{N})$

Anhang A

Beweise und Lösungen

A.1 Übung (i): Element aus unendlicher Menge entfernen

Indirekt: Man weiß: Fügt man einer endlichen Menge ein Element hinzu, so ist sie ebenfalls endlich. Würde man einer unendlichen Menge ein Element entfernen und wäre sie dann nach Annahme endlich, ließe sich dieses Element wieder hinzu fügen. Per definitionem wäre die Menge dann aber endlich - Widerspruch! Also ist die Menge wieder unendlich.

A.2 Übung (ii):

Die Vorschrift lautet:

$$\begin{array}{rcccl} f & : & M & \stackrel{bij.}{\rightarrow} & N \\ & & x & \mapsto & \ln\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right] \end{array}$$

$\ln \frac{1}{x} = y$ ist äquvalent zu $\frac{1}{x} = e^y$ oder

$$x = \frac{1}{e^y}$$

Es gilt: $\forall\ y > 0\ :\ x < 1\ (x > 0)$. Also: Aus $\ln \frac{1}{x} = y$ mit $0 < x < 1$ folgt: $y > 0$. Sei $\delta(x) = \ln \frac{1}{x}$. Wir halten fest:

$$\begin{array}{rcccl} \exists\ h & : & (0;1) & \stackrel{bij.}{\rightarrow} & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & \delta(x) \end{array}$$

Aus der Definition des ln mit $\mathbb{D} = (0; +\infty)$ und $W = \mathbb{R}$ ergibt sich mit $x \mapsto \ln(\delta)\ \ (\delta(x) > 0,\ \forall x \in (0;1))$ obige bijektive Abbildung f.

A.3 Übung (iii): Teilmengen endlicher Mengen

Beweis. Per Induktion: Für n=1 gilt offensichtlich: $M_1 = \{1\}$ hat 2^1 Teilmengen. Daher: Für ein beliebiges aber festes n gilt: $M_{n-1} = \{1, 2, ..., n-1\}$ hat 2^{n-1} Teilmengen. Wir stellen fest: Alle Teilmengen von M_{n-1} sind auch Teilmengen von M_n. Fügt man jeder Teilmenge von M_{n-1} ein Element hinzu, ergeben sich 2^{n-1} neue Teilmengen: $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 * 2^{n-1} = 2^n$ $\square$

A.4 Hilberts Hotel

Beispiel 1: Jeder Gast rückt ein Zimmer weiter. Der erste Raum ist damit frei und der Gast findet Platz.

Beispiel 2: Jeder Gast verdoppelt seine Zimmernummer. Damit sind wieder unendlich viele Räume (alle ungeraden) frei (entspricht der bijektiven Zuordnung der Geraden Zahlen mit den natürlichen Zahlen).

A.5 Beweis von Cantors 3. Diagonalargument anhand eines Beispiels

Folgendes Beispiel wurde Zitiert aus [5], S.195:

„ In einem bestimmten Universum bildet jede Menge von Bewohnern einen Verein. Der höchste Verwaltungsbeamte des Universums möchte jeden Verein nach einem Bewohner benennen, und zwar so, dass keine zwei Vereine den Namen desselben Bewohners tragen und dass jeder Bewohner ein Namensgeber für einen Verein ist. Es ist nicht unbedingt notwendig, dass die Person ein Mitglied des Vereins ist, der seinen Namen trägt. Nun, für ein Universum mit nur endlich vielen Menschen ist dies eindeutig unmöglich, denn es existieren mehr Vereine als Bewohner [...]. Allerdings hat dieses bestimmte Universum unendlich viele Einwohner [...]. “

Nehmen wir an dies könnte durchgeführt werden. Wir erhalten einen Widerspruch wie folgt: Ein Einwohner heiße *gesellig*, wenn er dem nach ihm benannten Verein angehört. Andernfalls heiße er *ungesellig*. Weil in diesem Universum jede Menge von Einwohnern einen Verein bildet, bildet auch die Menge aller ungeselligen Einwohner einen Verein. Dieser Verein muss nun nach jemandem Benannt sein - sagen wir *Emil*. Ist Emil gesellig oder nicht? Nun, wäre er gesellig, so bedeutete dies, dass Emil zum „Emil-Verein“ gehört, jedoch gehören nur ungesellige Personen zu Emils Verein. Also muss er ungesellig sein. Da jedoch **jeder** ungesellige Einwohner zu Emils Verein gehört, müsste dies auch auf Emil zutreffen, was ihn aber gesellig macht - wir erhalten unseren Widerspruch.

Anhang B

Georg Cantor

Abbildung B.1: Georg Cantor: *1845 - †1918.

Die Daten wurden aus [3] entnommen.

3.3.1845 - Geburt von Georg Ferdinant Ludwig Philipp Cantor in Petersburg. Sohn von Georg Woldemar Cantor.

1862 - Einwilligung des Vaters auf den Wunsch Cantors Mathematik zu studieren.

1863 - Tod des Vaters. Umzug nach Berlin.

1863-1866 - Studium der Mathematik in Berlin. Besonderes Interesse Cantors an der Analysis.

14.12.1866 - Promotion an der Universität Berlin.

1868 - Ablegen der Leramtsprüfung.

1872 - Cantor lernt Dedekind (*1831 - †1916) kennen. Es findet bis 1879 ein intensiver Briefwechel statt.

1873 - Diskusion von Cantor und Dedekind ob sich die natürlichen Zahlen und die reellen Zahlen bijektiv aufeinander abbilden lassen.

1874 - In „Über eine Eigenschaft des Inbegriffs der reellen algebraischen Zahlen“ veröffentlicht Cantor seinen nach Vorschlägen von Dedekind modifizierten Beweis.

1878 - Cantor beweist die Gleichmächtigkeit ein- und mehrdimensionaler Kontinua. Veröffentlicht in „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“ („Celles Journal“).

1879-1884 - In den „Mathematischen Annalen“ erscheinen sechs Arbeiten von Cantor.

1883 - Erfolglose Bewerbung um eine Professur in Berlin. Das Kontinuumsproblem und Kritik von Kronecker belasten Cantor.

Mai 1884 - Erstes Auftreten schwerer psychischer Depressionen. Erster Aufenthalt in der Psychiatrie Halle.

1886-1888 - Cantor verteidigt seine Ideen in mehreren Arbeiten.

18.9.1890 - Gründung des DMV (Deutscher Mathematiker Verein), an der Cantor entscheindenden Anteil hat.

1891 - Erste Anwendung des Diagonalverfahrens und Beweis des Satzes über Potenzmengenopearationen.

1895 - Erste Entdeckungen von Paradoxien in der Mengenlehre.

1896 - Tod der Mutter.

1899 - Erneute psychische Erkrankung und mehrere Todesfälle in der Familie.

1900 - Hilbert setzt Cantors Kontinuumshypothese auf seine Liste über die Probleme für das 20. Jh.

1901 - Ehrenmitglied der „London Mathematical Society“, was Cantor lebenslange Freude bereitete.

1902-1904 - Erneute psychische Erkrankungen.

1907/1911 - Zwei längere Klinikaufenthalte in Halle.

1911 - Cantor besucht die 500 Jahr-Feier der University of St. Andrews.

1912 - Ehrendoktor der University of St. Andrews

1913 - Pensionierung.

1915 - Cantors 70. Geburtstag. Große Feier in Halle.

11.5.1917 - Letzte Einlieferung in die Nervenklinik Halle. Bitten Cantors entgegen seiner Familie ihn aus der Klinik zu befreien.

6.1.1918 - Tod Cantors nach einem Herzinfarkt in der Nervenklinik Halle.

„Ist es doch nicht bloß der große Gelehrte und Forscher von einzig dastehender Orginalität, sondern auch der großzügige Mensch und treue anhängliche Freund, den wir nicht mehr haben, der aber desto fester in unserem Gedächtnis leben wird [...] “

David Hilbert an Cantors Tochter Else.

„Und Einstein, der alles sofort erfaßte, war ganz überwältigt von der Großartigkeit dieser Gedanken...“

Daniel Schliebner
14. Dezember 2003

Literaturverzeichnis

[1] *Pierre Basieux*: Brücken zwischen Wirklichkeit und Fiktion. Rowohlt Taschenbuchverlag, 1999.

[2] *Klaus Jänich*: Lineare Algebra. Springer-Verlag, 2002.

[3] *Dr. Oliver Deiser*: Einführung in die Mengenlehre. Springer-Verlag, 2002.

[4] *Robert und Ellen Kaplan*: Das unendliche Denken. Econ-Verlag, 2003.

[5] *Raymond Smullyan*: Satan, Cantor und die Unendlichkeit. Birkhäuser-Verlag, 1993.

[6] *Konrad Königsberger*: Analysis 1. Springer-Verlag, 2001.

[7] *Martin Weilandt und Martin Stigge*: Internet: http://www.informatik.hu-berlin.de/~mstigge/a1/skript/html/node12.html

[8] *Stefan Jaitner*: Pdf: http://www.stefanjaitner.de/pdf/reellezahlen.pdf

[9] *Prof. Peter Koepke*: Pdf: http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Data/Lectures/skript/skript_1.pdf

[10] *Luise Unger*: Pdf: http://algebramcs.fernuni-hagen.de/Applets/mathkit/HA/Historisches/Mengen-pdf.pdf

Quellenverweise der Abbildungen

Abbildung 4.1 ist [1] entnommen.

Abbildung 5.1 ist [8] entnommen.

Abbildung B.1 ist [10] entnommen.