Zucker im Kaffee:

(Ein Beispiel zur Problemlösung mittels DGL bzw. AWP)

Problem: Der Kaffee, den ich mir früh am Morgen koche, ist viel zu heiß um ihn gleich zu trinken. Nun, frage ich mich, soll ich gleich den Zucker dazugeben oder etwas später, damit der Kaffee schneller eine Trinktemp. erreicht?

- Das Problem wird zuerst modelliert: Es geht um die Temperatur<u>veränderung</u> mit der Zeit.

- Sei $T_K(t)$ die <u>Kaffeetemperatur</u> zum Zeitpkt t,

  T_L sei die Lufttemperatur in dem Raum, wo der Kaffee ist,

  T_m sei die maximale Trinktemp.

- Wir <u>nehmen an</u> (eigentlich, wir wissen es), die Abkühlung geht umso schneller voran je größer die Differenz zwischen Kaffeetemperatur und Lufttemperatur ist und ist proportional dieser Differenz.

die Veränderung der Kaffeetemperatur mit der Zeit

D.h. $T_K'(t) = c \cdot (T_K(t) - T_L)$, mit (1)

einem Faktor $c < 0$.

Da die Kaffetemperatur abnimmt, ist die erste Ableitung $T_K'(t)$ negativ!

(1) Gesucht ist zuerst $T_K(t)$, ohne die Zugabe von Zucker.
Das bedeutet, wir suchen die allg. Lsg des DGL (1), die offenbar eine lineare DGL 1. Ordnung ist.

(2) Danach betrachten wir die zwei Möglichkeiten Zucker hinzuzugeben: Gleich am Beginn oder später.

zu (1) Betr. (1) $\Leftrightarrow T_K'(t) - c \cdot T_K(t) = -c \cdot T_L$

mit $a(t) = -c$, $f(t) = -c \cdot T_L$.

$\Rightarrow A(t) = -\int c \, dt = -c \cdot t$

$\Rightarrow e^{A(t)} = e^{-ct}$; $e^{-A(t)} = e^{ct}$

$$\Rightarrow T_K(t) = \Big(\int f(t) \cdot e^{A(t)} dt + \underset{\text{Const.}}{d}\Big) \cdot e^{-A(t)}$$

$$= \Big(\int (-c \cdot T_L) \cdot e^{-ct} dt + d\Big) \cdot e^{ct}$$

Subst. $u := -ct$ $u' = -c$

$$= \Big(T_L \cdot \int \underbrace{e^{-ct}}_{e^u} d(\underbrace{-ct}_{u}) + d\Big) \cdot e^{ct}$$

$$= (T_L \cdot e^{-ct} + d) e^{ct} = \underline{\underline{T_L + d \cdot e^{ct}}} \quad \text{allg. Lsg.}$$

d.h. $T_K(t) = T_L + d \cdot e^{ct}$ (2)

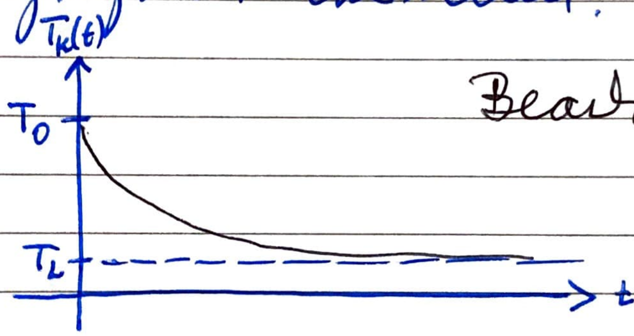
• Zum Zeitpkt $t=0$, seit dem der Kaffee fertig ist, sei die Kaffeetemp. T_0 (nicht immer $100°C$, aber kurz davor). D.h.

$$T_0 = T_K(t=0) = d \cdot e^0 + T_L = d + T_L.$$

$$\Rightarrow d = T_0 - T_L.$$

Folglich gilt: $T_K(t) = (T_0 - T_L) \cdot e^{ct} + T_L$ (3)

Damit können wir schnell die Abkühlung auch graphisch darstellen:



Beachten: $c<0$!

zu (2) Die Auflösung des Zuckers im Kaffee verbraucht Energie $\Rightarrow$ Die Kaffeetemperatur sinkt um $\underline{k}$ grad.

(2.1) Zucker zum Zeitpunkt $t=0$ hinzugeben.
$\Rightarrow$ Abkühlung startet mit $\underline{T_0 - k}$

Damit ergibt sich aus (2):

$$T_0 - k = T_K(0) = d + T_L \Rightarrow d = T_0 - T_L - k$$

und damit ist $T_K(t)$ in diesem Fall

$$T_K(t) = (T_0 - T_L - k) \cdot e^{ct} + T_L$$ (4)

(2.2.) Der Zucker wird später in den Kaffee dazugegeben. Da wir angenommen haben, dass je größer die Differenz zw. $T_K(t)$ und T_L ist, umso schneller kühlt d. Kaffee, suchen wir einen Zeitpunkt t^*, so dass

$$T_K(t^*) = T_m + k \,. \quad (5')$$

% Zum Zeitpunkt t^* wird der Zucker in den Kaffee eingegeben und die Kaffeetemp. sinkt um $\underline{\underline{k}}$, d.h. die Kaffeetemp. wird T_m und damit das Kaffeegetränk trinkbar. %

Die Abkühlung in diesem Fall beginnt bei T_0 und wird mit (3) beschrieben, d.h. in diesem Fall gilt:

$$T_K(t) = (T_0 - T_L)\, e^{ct} + T_L \,. \quad (5)$$

% (3) = (5) %

(3) Um das Problem zu lösen, müssen wir den Zeitpunkte berechnen, je nach dem wie man vorgeht, an dem die Kaffeetemperatur den Wert T_m erreicht hat.

Zucker sofort: T_m erreicht zum Zeitpkt t_1
Zucker später: T_m erreicht zum Zeitpkt t_2

% $t_2 = t^*$ offensichtlich %.

Aus (4) folgt dann:

$$T_m = T_k(t_1) = (T_0 - T_L - k) \cdot e^{c t_1} + T_L$$

$$\Leftrightarrow T_m - T_L = (T_0 - T_L - k) e^{c \cdot t_1}$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \ln\left(\frac{T_m - T_L}{T_0 - T_L - k}\right)^{\frac{1}{c}}$$ und $c < 0$, d.h. $\frac{1}{c} < 0$.

Aus $\underbrace{(5)}_{+(5')}$ folgt:

$$k + T_m = T_k(t_2) = (T_0 - T_L) e^{c t_2} + T_L$$

$$\Leftrightarrow (T_m + k - T_L) = (T_0 - T_L) \cdot e^{c t_2}$$

$$\Leftrightarrow t_2 = \ln\left(\frac{T_m + k - T_L}{T_0 - T_L}\right)^{\frac{1}{c}}, \quad \frac{1}{c} < 0.$$

<u>Behauptung:</u> $t_2 < t_1$.

<u>Beweis:</u> <u>Ann.</u> $t_2 > t_1$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{T_m + k - T_L}{T_0 - T_L}\right)^{\frac{1}{c}} > \ln\left(\frac{T_m - T_L}{T_0 - T_L - k}\right)^{\frac{1}{c}}$$

$$\underset{\substack{\ln\text{-mon.}\\ \text{steigend}}}{\Longrightarrow} \left(\frac{T_m + k - T_L}{T_0 - T_L}\right)^{\frac{1}{c}} > \left(\frac{T_m - T_L}{T_0 - T_L - k}\right)^{\frac{1}{c}}$$

und $\frac{1}{c} < 0$. Sei $a := -\frac{1}{c} \Rightarrow a > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_m+k-T_L}{T_m-T_L}\right)^{-a} > \left(\frac{T_0-T_L}{T_0-T_L-k}\right)^{-a} \quad , a>0$$

$$\Rightarrow \Big(\underbrace{\frac{T_m-T_L}{T_m+k-T_L}}_{>0}\Big)^{a} > \Big(\underbrace{\frac{T_0-T_L-k}{T_0-T_L}}_{>0}\Big)^{a}$$

$$\Rightarrow \frac{T_m-T_L}{T_m+k-T_L} > \frac{T_0-T_L-k}{T_0-T_L}$$

$$\Rightarrow (T_m-T_L)\cdot(T_0-T_L) > \underbrace{\big((T_m-T_L)+k\big)\cdot\big((T_0-T_L)-k\big)}_{=(*)}$$

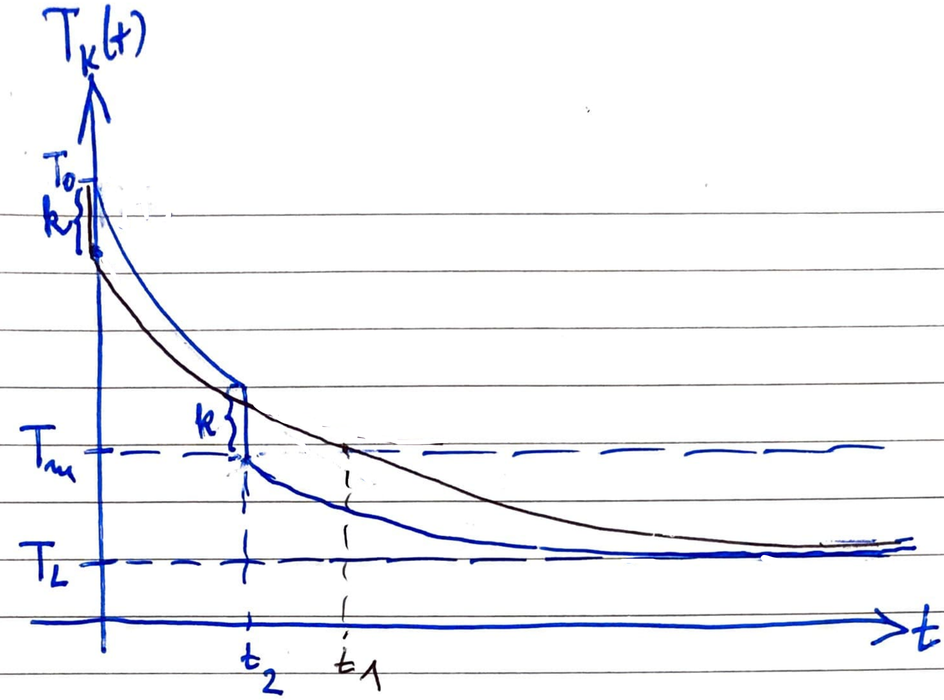
$$(*) = (T_m-T_L)(T_0-T_L)+k\cdot(T_0-T_L)-k(T_m-T_L)-k^2$$

$$\Rightarrow 0 > k(T_0-T_L-T_m+T_L)-k^2$$

$$\Rightarrow k^2 > k(T_0-T_L) \quad \Big|\cdot\frac{1}{k} \;, k>0$$

$$\Rightarrow k > T_0-T_L \;\lightning \qquad \square$$

Die Zuckerauflösung senkt die Kaffeetemp. nicht von fast 100°C auf Lufttemperatur.



Das Problem, aber nicht die Lösung, stammt aus dem Buch "Mathematik für Informatiker" von Peter Hartmann, Springer Verlag, 2015.