Aufgabe 7+15=22 Punkte

(a) Betrachten Sie die folgende LOA

$$(P) \quad \max \left\{ 7x_1 - 2x_2 + 13x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_4 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 25 \\ 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 17 \\ x_i \geq 0,\ i \in [4] \end{array} \right\}$$

Geben Sie die zu (P) duale LOA (D) an!

$$(D) \quad \min \left\{ 20y_1 - 25y_2 + 17y_3 \;\middle|\; \begin{array}{c} y_1 - y_2 \geq 7 \\ -2y_2 + 7y_3 \geq -2 \\ y_2 + 5y_3 \geq 13 \\ y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 0 \\ y_i \geq 0,\ i \in [3] \end{array} \right\}.$$

(b) Lösen Sie folgende lineare Optimierungsaufgabe (P) mittels des Simplexalgorithmus und ggf. Gomory-Schnitte. Geben Sie jeden Schritt explizit an.

$$(P) \quad \max \left\{ x_1 - x_2 + 3x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ 5x_1 - x_3 \leq 10 \\ 2x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ x_i \geq 0,\ x_i \in \mathbb{Z},\ i \in [3] \end{array} \right\}.$$

$x^{(1)}$

		x_1	x_2	x_3
	0	-1	1	-3
u_1	5	3	-2	0
u_2	10	5	0	-1
u_3	15	0	2	3

$x^{(2)}$

		x_1	x_2	u_3	Q
	15	-1	3	1	
u_1	5	3	-2	0	5/3
u_2	15	5	2/3	1/3	3
x_3	5	0	2/3	1/3	

$x^{(3)}$

		u_1	x_2	u_3
	50/3	1/3	7/3	1
x_1	5/3	1/3	-2/3	0
u_2	20/3	-5/3		1/3
x_3	5	0	2/3	1/3
u_4	-2	-1	-1	0
Q		1/3	7/3	

$\Rightarrow x^{(3)} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist opt., aber

$x^{(3)} \notin \mathbb{Z}^3 \Rightarrow$ Gomory-Schnitt für z:

$\left(\frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor\right) u_1 + \left(\frac{7}{3} - \left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor\right) x_2 \geq \frac{50}{3} - \left\lfloor \frac{50}{3} \right\rfloor$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} u_1 + \frac{1}{3} x_2 \geq \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow u_1 + x_2 - u_4 = 2$

$\Leftrightarrow -u_1 - x_2 + u_4 = -2$

$u_4 \geq 0$

$x^{(4)}$

		u_4	x_2	u_3
	16	1/3	2	1
x_1	1	1/3		0
u_2	10	-5/3		1/3
x_3	5	0		1/3
u_1	2	-1	1	0

$\Rightarrow x^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3$ und

da die Simplextab. opt. ist, ist $x^{(4)}$ Lsg f. (P)

$ZF_{(P)}(x^{(4)}) = 16$.

$\square$

Aufgabe 15+3=18 Punkte

(a) Lösen Sie folgende Differentialgleichung:

$$2x^2y' + (1-x^2)y = e^{\frac{1+x^2}{2x}}, \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } x \neq 0.$$

Geben Sie dabei jede einzelne Berechnung explizit an!

(b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

DGL aus (a) mit $y(1) = 0$.

Lsg: (a) $\quad y' + \underbrace{\frac{1-x^2}{2x^2}}_{a(x)} y = \underbrace{\frac{e^{\frac{1+x^2}{2x}}}{2x^2}}_{f(x)}$ li. DGL 1. Ordn.

$$\Rightarrow A(x) = \int \frac{1-x^2}{2x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}x^{-2}\,dx - \int \frac{1}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^{-1}(-1) - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1+x^2}{x}\right).$$

$$\Rightarrow e^{A(x)} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1+x^2}{x}\right)} \qquad e^{-A(x)} = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)}$$

$$\Rightarrow y(x) = \left(\int f(x)\cdot e^{A(x)}\,dx + C\right)\cdot e^{-A(x)}$$

$$= \left(\int e^{\frac{1+x^2}{2x}} \cdot \frac{1}{2x^2} \cdot e^{-\left(\frac{1+x^2}{2x}\right)}\,dx + C\right)\cdot e^{\frac{x^2+1}{2x}}$$

$= e^0 = 1$

$$= \left(\frac{1}{2}\int x^{-2}\,dx + C\right)\cdot e^{\frac{x^2+1}{2x}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^{-1}(-1) + C\right)\cdot e^{\frac{x^2+1}{2x}} = \underline{\underline{\left(-\frac{1}{2x} + C\right)\cdot e^{\frac{x^2+1}{2x}}}} \text{ allg. Lsg}$$

$$= \left(C - \frac{1}{2x}\right)\cdot e^{\frac{x^2+1}{2x}}$$

(b) $0 = y(1) = \left(c - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{\frac{1+1}{2}} = \left(c - \frac{1}{2}\right) \cdot e$

$\Leftrightarrow \left(c - \frac{1}{2}\right) \cdot e = 0$, da $e \neq 0$

$\Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \underline{y(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\right) \cdot e^{\frac{x^2+1}{2x}}}$ die gesuchte part. Lsg. $\square$

i