Wichtige Themen

– Grundbegriffe
– Grundeigenschaften

① $\boxed{\text{Was ist Optimierung}}$

Sei $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$

min/max $\{f(x) \mid x \in M\}$

* Lineare Optimierung

f - linear, d.h. $f(x) = \langle c, x \rangle$; $x, c \in \mathbb{R}^n$

$M = \{x \mid g_i(x) \leq b,\ i = 1, \dots, m\}$ $\quad g_i(x) := \langle A_i, x \rangle$

↑ konv. Polyeder – Def.

* extremaler Pkt (Ecke) – Def.

– Eigenschaften

$<$ char.

Lemma 2: $x \in M$ - extr. $\iff \neg \exists y\, (y \in M \wedge y \neq x \wedge I(y) \supseteq I(x))$.

Beweisidee: $(\rightarrow)$ Annahme $\rightarrow y$ (Fälle)

$(\leftarrow)$ Annahme y

Lemma 3: $M \neq \emptyset$, M - q Polyeder

M besitzt Extremalpkt $\iff$ M enthält keine Ger.

Beweisidee: $(\Rightarrow)$ Annahme

$(\Leftarrow)$ konstruktiv:

2 Pkte mit $\left\{\begin{matrix}\text{gleichen} \\ \text{aktiven}\end{matrix}\right\}$ Restr. (max.) .....

→ Satz 1:

Satz 1: (1) M - konv. Polyeder

(2) S - Lsgsmenge der LOA $\min\{\langle c,x\rangle \mid x\in M\}$

(3) M besitzt mind. einen Extremalpkt

(4) $S \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists \bar{x}\,(\bar{x}\in S \wedge \bar{x}$ - extremal in $M)$.

Beweisidee: Wir beweisen gar mehr:

$\exists \bar{x}\,(\bar{x}$ - extremal in $S \wedge \bar{x}$ - extremal in $M)$:

1. Schritt: S - konv. Pol. und $\bar{x}$ - Ecke v. S

2. Schritt: $\bar{x}$ - Ecke v. M (Annahme!)

↳ Bedeutung des Satzes → Motivation!

② Basismatrix, Nichtbasismatrix, BV, NBV, Basispkt $\bar{x}$ zur BM A_B; zul. BP.

$\bar{x}_j = 0 \quad \forall j\in N$

$A\bar{x} = b$ bzw. $A_k\cdot(\bar{x}_k)_{k\in B} = b$

Satz 2 (Charakt.) M - konv. Polyeder in Gl.-form.

$\bar{x}$ - extremal in $M \Longleftrightarrow \bar{x}$ zul. BP zu A.

Beweisidee: $(\Leftarrow)$ Annahme

$(\Rightarrow)$ $\bar{N} := \{j \mid \bar{x}_j > 0\}$

$$A = (\underbrace{|\;|\;\;|}_{\bar{N}\text{ - lin. unabhg.}}\;\cdots\;\cdots\;|\;\cdots\;|)$$

⟶ ergänzen zur Basismatrix B $\Rightarrow A_B$ hat $\bar{x}$

$B \supseteq \bar{N}$ als BP!

③ * Mehrdeutigkeit der Lsg ($\exists\, d_{0j}=0$ in der Opt. Tab.)

Seien $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ BP und Lösungen

↳ $\bar{x} = \sum_1^k \lambda_i \bar{x}_i$ auch, für $\lambda_i \geq 0$ $\sum_1^k \lambda_i = 1$

* Hilfsaufgabe: $M \neq \emptyset$?

Haben (P) $\max\{\langle c, x\rangle \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$

↳ $Ax + Ey = b,\ x, y \geq \theta$

↳ (HA) $\min\{\sum_1^m y_i \mid Ax + Ey = b;\ x, y \geq \theta\}$

↳ (HA) immer lösbar und Lsg $\underline{v}$:

v

$0 =$: $\bar{y} = 0_m$ $\wedge$ $\bar{x} \in M$

> 0 : $M = \emptyset$

* Lexikographische SM

– warum notwendig?

– warum funktioniert sie <u>immer</u>?

④ Dualität

* Def. 1: $\max\{\langle c,x\rangle \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}$

Def. 2: $\max\{\langle c,x\rangle \mid Ax = b,\ x \ge 0\}$

Def. 3: $\max\{\langle c,x\rangle \mid \begin{matrix} A_1 x = b_1 \\ A_2 x \le b_2 \end{matrix},\ x \ge 0\}$

↳ Äquivalenz

Eigenschaften: (P) lösbar $\Leftrightarrow$ (D) lösbar und $V_{(P)} = V_{(D)}$.

Bedeutung: (1) $x \in M$, $u \in D$

↳ $\langle c,x\rangle \le V \le \langle b,u\rangle$ ↳ $V - \langle c,x\rangle \le \underbrace{\langle b,u\rangle - \langle c,x\rangle}_{\text{Güte d. Näherung}}$

(2) Duale SM → • Nachoptimieren

* Gomory-Schnitte – Berechnung • ganzzahlige Opt.

⑤ 1-par. Optimierung

* Def: $P(t) \max\{\langle c(t),x\rangle \mid Ax = b,\ x \ge 0\}$

* Lösungsidee

* endlich viel charakt. Pkte – warum?

⑥ Transportaufgabe

* Def. — nicht formal
— formal $\min \{ \langle c, x \rangle \mid \sum_i x_{ij} = b_j \ \forall j, \ \sum_j x_{ij} = a_i \ \forall i, \ x_{ij} \geq 0 \}$

* TA (kl.) – immer lösbar – warum?

$M_T \neq \emptyset$

ZF ~~nach~~ beschr.

* Lösen die Duale TA

$\max \{ \langle a, u \rangle + \langle b, v \rangle \mid u_i + v_j \leq c_{ij} \}$

* Optimierungskriterium (Charakt.-satz – Beweisidee)

– Verbessern v. TP ⇝ Zyklus

* Variationen der kl. TA

– Überproduktion

– Unterproduktion

– Streckensperrung

– Kapazitätenbeschr. ⟹ (Char. satz – Beweisidee)

7 Spieltheorie

* Def: – Spiel
  – Gewinnfkt
  – Situation
  – annehmbare Situation
  – GGS <-> (optimale Str.!)
  – antagonistische Spiele
* Eigenschaften v. antag. Spielen
* Charakterisierung

(s_1, s_2) – GGS $\Leftrightarrow \max_{x \in S_1} f(x, s_2) \le \min_{y \in S_2} (s_1, y)$

* Gemischte Erweiterung Γ^*

__Satz:__ Γ^* besitzt immer eine GGS.

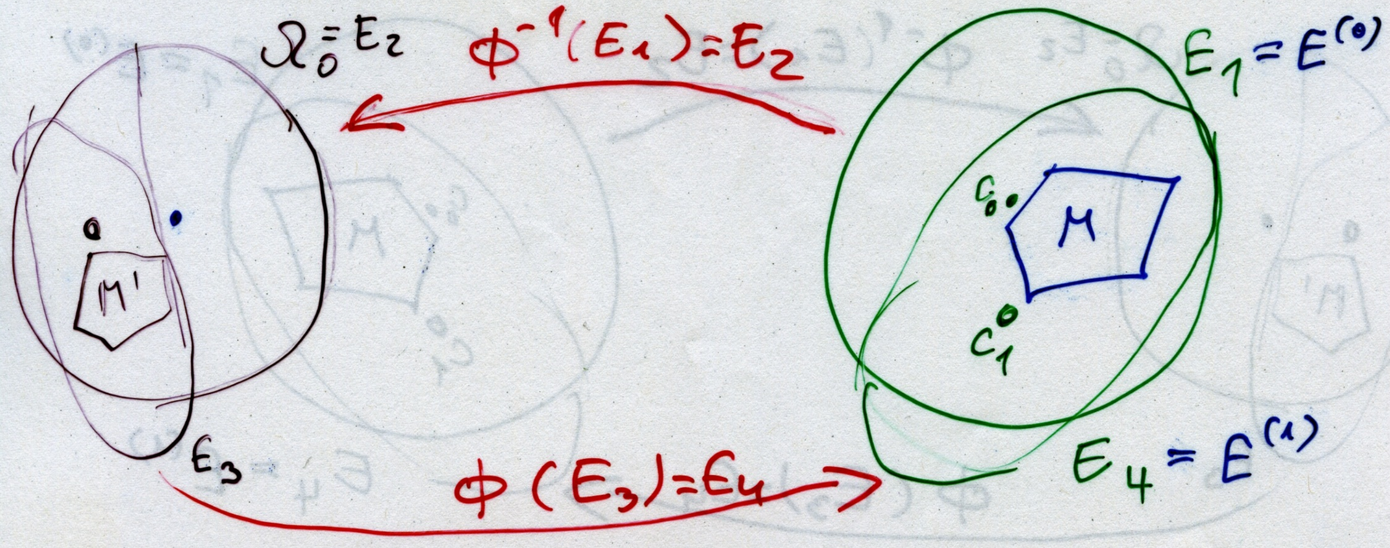
__Beweisidee:__ $g_1(p) := \min_{q \in Q} \langle p, Aq \rangle$ – garantierter min. Gewinn für Sp. 1.

$g_2(q) := \max_{p \in P} \langle p, Aq \rangle$ – garantierter maximaler Verlust für Sp. 2

Suchen $\max_{p \in P} g_1(p)$ und $\min_{q \in Q} g_2(q)$

- LOA's
- besitzen immer eine Lsg
- zueinander dual

(8) Ellipsoiden-Verfahren (Idee).



$E^{(0)}, E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots$ mit $\lambda(E^{(0)}) \geqq \ldots \geqq \lambda(M)$
$c_0, c_1, c_2, \ldots$

$\left(\lambda(E^{(i)})\right)_{i \in N}$ ist eine Nullfolge

$\hookrightarrow$ nach endl. $\underbrace{\text{viel Schritten}}_{\text{polyn. beschr.}}$ bricht sie ab.