Aufgabe 7+13=20 Punkte

(a) Betrachten Sie die folgende LOA

$$(P) \quad \max \left\{ x_4 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 \leq 25 \\ -6x_1 + 12x_2 - x_3 - 2x_4 \geq 30 \\ x_i \geq 0, i \in [4] \end{array} \right\}$$

Geben Sie die zu (P) duale LOA (D) an!

$(D) \quad \min \{ 25y_1 - 30y_2 \mid$ 1 1

$2y_1 + 6y_2 \geq 0$ 1

$7y_1 - 12y_2 \geq 0$ 1

$-3y_1 + y_2 \geq 0$ 1

$2y_2 \geq 1$ 1

$y_i \geq 0, \; i \in [2]$ $\}$ 1

(b) Lösen Sie folgende lineare Optimierungsaufgabe (P) mittels des Simplexalgorithmus. Berechnen Sie ggf. die Hilfsaufgabe für (P) um einen ersten zulässigen Basispunkt zu erhalten. Geben Sie in diesem Fall explizit die Hilfsaufgabe an.

$$(P) \quad \max\left\{-7x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 1 \;\middle|\; \begin{array}{c} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_i \geq 0, i \in [3] \end{array}\right\}.$$

(H_p) $-y_1 - y_3 \longrightarrow \max$ 1

$4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - u_1 + y_1 = 2$ 1

$x_1 + x_2 + u_2 = 7$ 1

$x_1 - x_2 - 2x_3 + y_3 = 5$ 1

$$\left.\begin{array}{l} x_i \geq 0 \quad i \in [3] \\ y_j \geq 0 \quad j \in \{1,3\} \\ u_s \geq 0 \quad s \in [2] \end{array}\right\} 1$$

}

$-y_1 - y_3 = 5x_1 - 4x_2 - u_1 - 7$ 1

(1)

		x_1	x_2	x_3	u_1
	-7	-5	4	0	1
y_1	2	4	-3	2	-1
u_2	7	1	1	0	0
y_3	5	1	-1	-2	0

(2)

		y_1	x_2	x_3	u_1
	$-9/2$	$5/4$	$1/4$	$5/2$	$-1/4$
x_1	$1/2$	$1/4$	$-3/4$	$1/2$	$-1/4$
u_2	$13/2$	$-1/4$	$7/4$	$-1/2$	$1/4$
y_3	$9/2$	$-1/4$	$-1/4$	$-5/2$	$1/4$

PE = 1 Pkt

(1) - richtig => 1 Pkt

PE = 1 Pkt

(2) richtig => 1 Pkt

(3)

		y_1	x_2	x_3	y_3
	0	1	0	0	1
x_1	5	0	-1	-2	1
u_2	2	0	2	2	-1
u_1	18	-1	-1	-10	4

(3) richtig => 1 Pkt

=> Tab. opt.

=> zurück zu (P)

$$ZF_P = -7x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 1$$
$$= -7(5 + x_2 + 2x_3) + 3x_2 - 2x_3 - 1$$
$$= -35 - 1 - 7x_2 + 3x_2 - 14x_3 - 2x_3$$
$$= -36 - 4x_2 - 16x_3$$

ZF_P richtig => 1 Pkt

=> Pkt $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ opti für (P)

mit $ZF_P(\tilde{x}) = -36$

(1_P)

		x_2	x_3
	-36	4	16
x_1	5	-1	-2
u_2	2	2	2
u_1	18	-1	-10

opti in $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $ZF_P = -36$ 1 Pkt.

Aufgabe 4: 15+5=20 Punkte

(a) Lösen Sie folgende Differentialgleichung:

$$x^2y'' + 2xy' = 2(1+x), \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } x \neq 0.$$

(b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

DGL aus (a) mit $y'(1) = 4$ und $y(1) = 5$.

Lsg: (a) $y'' + \frac{2}{x} y' = \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x}$ (1)

Sei $z(x) := y'(x)$ 1 Pkt. $\Rightarrow z'(x) = y''(x)$

(1) $\Leftrightarrow z' + \underbrace{\frac{2}{x}}_{a(x)\ \{1\}} z = \underbrace{\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x}}_{f(x)}$ 1 Pkt lin, 1. Ordnung

$\Rightarrow y'(x) = z(x) = \left(\int f(x) \cdot e^{A(x)} dx + C\right) e^{-A(x)}$

$\Rightarrow A(x) = \int \frac{2}{x} dx = 2\ln|x| = \ln x^2$ 2 Pkte

1 Pkt $e^{A(x)} = x^2$

$\Rightarrow \boxed{y'(x)} = z(x) = \left(\int \left(\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x}\right) \cdot x^2 dx + C\right) e^{-A(x)}$ 1 Pkt $e^{-A(x)} = \frac{1}{x^2}$

$= \left(\int \underbrace{\left(2 + 2x\right)}_{1} dx + C\right) \cdot \frac{1}{x^2}$

$= (\underbrace{2x}_{1} + \underbrace{x^2}_{1} + C) \cdot \frac{1}{x^2} = \boxed{\frac{2}{x} + 1 + \frac{C}{x^2}}$

$\Rightarrow \boxed{y(x)} = \int \left(\frac{2}{x} + 1 + \frac{C}{x^2}\right) dx = \underbrace{2 \cdot \ln|x|}_{1} + \underbrace{x}_{1} + \underbrace{C \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x}}_{1} + D$ 1 $=4$

$= \boxed{\ln x^2 + x - \frac{C}{x} + D}$ allg. Lsg. 1

(b) $4 = y'(1) = 2 + 1 + C \Leftrightarrow C = 1$ 2 Pkte

$5 = y(1) = \underbrace{\ln 1}_{=0} + \cancel{1} - \cancel{1} + D \Leftrightarrow D = 5$ 2 Pkte

$\Rightarrow y(x) = \ln x^2 + x - \frac{1}{x} + 5$ fast. Lsg. für (b). 1 Pkt