Beispiel: Lösen Sie folgende ILP:

(P) $\quad 2x_1 + x_2 \longrightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 5x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Lsg: Wir lösen zuerst die Relaxation (P_0):

$x^{(1)}$		x_1	x_2	
	0	-2	-1	
$\leftarrow u_1$	4	-1	2	2
u_2	20	5	1	20

$x^{(2)}$		x_1	u_1
	2	$-5/2$	$1/2$
x_2	2	$-1/2$	$1/2$
$\leftarrow u_2$	18	$11/2$	$-1/2$

$x^{(3)}$		u_2	u_1
z	$112/11$	$5/11$	$3/11$
x_2	$40/11$	$1/11$	$5/11$
x_1	$36/11$	$2/11$	$-1/11$
$\leftarrow u_3$	-2	-5	-3

$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 36/11 \\ 40/11 \end{pmatrix}$ ist opt. aber $\notin \mathbb{Z}^2$

Wir berechnen den Gomory-Schnitt für z:

$$\left(\frac{5}{11} - \underbrace{\left\lfloor \frac{5}{11} \right\rfloor}_{=0}\right) \cdot u_2 + \left(\frac{3}{11} - \underbrace{\left\lfloor \frac{3}{11} \right\rfloor}_{=0}\right) u_1 \geq \frac{112}{11} - \underbrace{\left\lfloor \frac{112}{11} \right\rfloor}_{=10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{11} \cdot u_2 + \frac{3}{11} \cdot u_1 \geq \frac{2}{11} \iff 5u_2 + 3u_1 \geq 2 \iff -5u_2 - 3u_1 + u_3 = -2$$

$x^{(4)}$		u_3	u_1
z	10	$1/11$	0
x_2	$18/5$	$1/55$	$2/5$
x_1	$16/5$	$2/55$	$-1/5$
u_2	$2/5$	$-1/5$	$3/5$
$\leftarrow u_4$	-33	-1	-22

$x^{(4)} = \begin{pmatrix} 16/5 \\ 18/5 \end{pmatrix}$ ist opt., aber nicht ganz-zahlig.

$\Rightarrow$ Gomory-Schnitt f. x_2:

$$\left(\frac{1}{55} - \left\lfloor \frac{1}{55} \right\rfloor\right) u_3 + \left(\frac{2}{5} - \left\lfloor \frac{2}{5} \right\rfloor\right) u_1 \geq \frac{18}{5} - \left\lfloor \frac{18}{5} \right\rfloor$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{55} u_3 + \frac{2}{5} u_1 \geq \frac{3}{5} \iff u_3 + 22u_1 \geq 33$$

$$\Leftrightarrow -u_3 - 22u_1 + u_4 = -33$$

$x^{(5)}$		u_3	u_4
z	10	1/11	0
x_2	3	0	1/55
x_1	7/2	1/22	-1/110
u_2	-1/2	-5/22	3/110
u_1	3/2	1/22	-1/22

$x^{(5)}$ ist nicht opt.

$x^{(6)}$		u_2	u_4
z	49/5	2/5	3/275
x_2	3	0	1/55
x_1	17/5	1/5	-1/275
u_3	11/5	-22/5	-3/25
u_1	7/5	1/5	-1/55
u_5	-220	-110	-3

$x^{(6)}$ ist opt., aber $x^{(6)} \notin \mathbb{Z}^2$

$\Rightarrow$ Gomory-Schnitt für z

Wir berechnen d. Gomory-Schnitt für z:

$$\left(\frac{2}{5}-\left\lfloor\frac{2}{5}\right\rfloor\right)u_2+\left(\frac{3}{275}-\left\lfloor\frac{3}{275}\right\rfloor\right)u_4 \geq \frac{4}{5}$$

$$\frac{2}{5}u_2 + \frac{3}{275}u_4 \geq \frac{4}{5} \Leftrightarrow 110u_2 + 3u_4 \geq 220$$

$$\Leftrightarrow -110u_2 - 3u_2 + u_5 = -220$$

$x^{(7)}$		u_5	u_4
	9		
x_2	3		
x_1	3		
u_3	11		
u_1	1		
u_2	2		

Optimal und $x^{(7)} \in \mathbb{Z}^2$

$x^{(7)} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$, $ZF(x^{(7)}) = 9$

$\square$

Achtung: z.B. $\left(-\frac{1}{3} - \underbrace{\left\lfloor -\frac{1}{3} \right\rfloor}_{=-1 \text{ und nicht } 0}\right) = \frac{2}{3}$!