Beispiel 2.10.1.

Lsg: $y' + y \cdot \underbrace{\tan x}_{a(x)} = \underbrace{\cos x}_{f(x)}$ $\quad x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

- Zuerst berechnen wir $A(x)$:

$$A(x) = \int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| \quad (*)$$

$$= -\ln(\cos x) \quad , \text{da } x \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow e^{A(x)} = e^{-\ln(\cos(x))} = e^{\ln(\cos(x)^{-1})} = \frac{1}{\cos x}$$

und $e^{-A(x)} = e^{\ln(\cos x)} = \cos x$

- Nach S. 2.8 $\Rightarrow$

$$y(x) = \left(\int f(x) \cdot e^{A(x)} dx + C \right) \cdot e^{-A(x)}$$

$$= \left(\int \cancel{\cos x}^{1} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos x}_{1}} dx + C \right) \cdot \cos x$$

$$= \underline{\underline{(x + C) \cdot \cos x}} \quad \text{allg. Lsg.}$$

(*) entweder aus einer Tab. der Stammfkt für die üblichen Fktn

od.

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$$

Subst. $u := \cos x$
$\Rightarrow du = -\sin x \, dx$

$$= -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u|$$

$$= -\ln|\cos x| \quad \boxtimes$$

Bsp. 2.10.2. Lösen Sie das AWP

(1) $xy' + 3y = x^3 + 4x, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad y(1) = \frac{1}{6}$

Lsg: $(1) \underset{x \in \mathbb{R}^+}{\Leftrightarrow} y' + \underbrace{\frac{3}{x}}_{a(x)} y = \underbrace{x^2 + 4}_{f(x)}$

$A(x) = \int \frac{3}{x}\,dx = 3 \cdot \ln x = \ln x^3$

$\underset{S. 2.8.}{\Rightarrow} \quad y(x) = \left(\int f(x) \cdot e^{A(x)}\,dx + c\right) e^{-A(x)}$

$= \left(\int (x^2 + 4) \cdot e^{\ln x^3}\,dx + c\right) \cdot e^{-\ln x^3}$

$= \left(\int (x^2+4) \cdot x^3\,dx + c\right) \cdot e^{+\ln(x^3)^{-1}}$

$= \left(\int (x^5 + 4x^3)\,dx + c\right) \cdot \frac{1}{x^3}$

$= \left(\frac{x^6}{6} + x^4 + c\right) \cdot \frac{1}{x^3}$ allg. Lsg.

$= \frac{x^3}{6} + x + \frac{c}{x^3}$

AWP: $\frac{1}{6} = y(1) = \frac{1}{6} + 1 + c \Leftrightarrow c = -1$

$\Rightarrow y(x) = \frac{x^3}{6} + x - \frac{1}{x^3}$ part. Lsg des AWP

□