Satz 2: Der Pkt $\overline{x} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ mit $A_1 \overline{x} = a$

$$A_2 \overline{x} = b$$

$$0 \le \overline{x} \le k$$

ist opt für (P) gdw

$\exists\ \overline{y} = \begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \\ \overline{w} \end{pmatrix}$ mit

(1) $A_1^T \cdot \overline{u} + A_2^T \overline{v} - \overline{w} \le c$

(2) $\overline{w} \ge 0$

(3a) $\overline{x}^T \left(A_1^T \overline{u} + A_2^T \overline{v} - \overline{w} - c \right) = 0$

(3b) $\overline{w}^T \left(k - \overline{x} \right) = 0$

Beweis ($\rightarrow$) Sei $\overline{x}$ - opt für (P)

$\leftrightarrow\ \exists\ \overline{y}$ - opt. für (D) $\leftrightarrow$ (1) und (2) erf.

Außerdem gilt:

$c^T \overline{x} = a^T \cdot \overline{u} + b^T \cdot \overline{v} - k^T \overline{w}$

$\Leftrightarrow\ c^T \overline{x} = (A_1 \cdot \overline{x})^T \cdot \overline{u} + (A_2 \overline{x})^T \cdot \overline{v} - k^T \cdot \overline{w}$

$\Leftrightarrow\ \overline{x}^T \cdot c = \overline{x}^T A_1^T \overline{u} + \overline{x}^T A_2^T \overline{v} - k^T \overline{w}$

$\Leftrightarrow\ k^T \overline{w} = \overline{x}^T A_1^T \overline{u} + \overline{x}^T A_2^T \overline{v} - \overline{x}^T c$

$$= \overline{x}^T \left(\underbrace{A_1^T \overline{u} + A_2^T \overline{v} - c}_{\text{wg}(1) \le \overline{w}} \right) \qquad (*)$$

$\rightarrow\ k^T \overline{w} \le \overline{x}^T \cdot \overline{w} \Leftrightarrow (k^T - \overline{x}^T)\, \overline{w} \le 0 \qquad (**)$

Außerdem gilt nach Vor:

$$\bar{x} \leq k$$

$$\hookrightarrow k^T \geq \bar{x}^T \hookrightarrow \left.\begin{array}{l}(k^T - \bar{x}^T) \geq 0 \\ \bar{w} \underset{(2)}{\geq} 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k^T - \bar{x}^T) \cdot \bar{w} \geq 0 \qquad ({*}^{*}{*}).$$

Aus $(**)$ u. $({*}^{*}{*}) \Rightarrow (k^T - \bar{x}^T)\bar{w} = 0$

$\Longleftrightarrow \bar{w}^T \cdot (k - \bar{w}) = 0 \hookrightarrow$ Beh $(3b)$ ✓

$(3b) \hookrightarrow k^T \cdot \bar{w} = \bar{x}^T \bar{w} \qquad \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right)$

In $(*)$ ersetzen wir $k^T \bar{w}$ durch $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right)$

$$\hookrightarrow \bar{x}^T (A_1^T \bar{u} + A_2^T \bar{v} - c) = \bar{x}^T \bar{w}$$

$$\Longleftrightarrow \bar{x}^T (A_1^T \bar{u} + A_2^T \bar{v} - c - \bar{w}) = 0 \qquad \boxed{3a}$$

$(\Longleftarrow)$ Betr.

(D) $\max \{a^T u + b^T v - k^T w \mid A_1^T u + A_2^T v - w \leq c, \; w \geq 0\}$

$\hookrightarrow \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix} \in M_D$ mit (1), (2), (3a), (3b).

Betr. (P), betr. $\bar{x} \in M_P$ mit. z.z.: $\bar{x}$ opt.

g.z.z.: $c^T \bar{x} = a^T \bar{u} + b^T \bar{v} - k^T \bar{w}$

Folgt sofort aus (3a) u (3b.) ▨