Beweis v. Satz 2.8.

zu 1. Wir betr. die homogene DGL

$$y' + a(x) \cdot y = 0 \quad , \text{d.h. } f(x) \equiv 0$$

$\Leftrightarrow y' = -a(x) \cdot y$. Das ist eine sep. DGL

$\Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = -a(x)$, für $y \neq 0$

$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int a(x)\,dx$

$\Leftrightarrow \ln|y| = -\int a(x)\,dx = -A(x) + C_2$, $C_2 = \text{const.}$

$\Leftrightarrow y = e^{-A(x)+C} = \underbrace{e^{C_2}}_{=:C_1} e^{-A(x)} = C_1 \cdot e^{-A(x)}$

$C_1 = \text{const}$ ✓

zu 2. (Variation der Konstanten, entwickelt v. Lagrange)

Um die inhomogene DGL zu lösen, wird die Konstante C_1 aus 1. durch eine noch zu bestimmende Fkt $c(x)$ ersetzt, d.h.

$$y(x) = c(x) \cdot e^{-A(x)} . \qquad (1)$$

Dann gilt, nach dem Differenzieren der beiden Seiten der letzten Gl.:

$$y'(x) = c'(x) \cdot e^{-A(x)} + c(x) \cdot e^{-A(x)} \cdot \left(-A(x)\right)'$$

$$= c'(x) \cdot e^{-A(x)} - \underbrace{c(x) \cdot e^{-A(x)}}_{= y(x)} \cdot a(x)$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = c'(x) \cdot e^{-A(x)} - y(x) \cdot a(x)$$

$$\Leftrightarrow c'(x) \cdot e^{-A(x)} = \underbrace{y'(x) + y(x) \cdot a(x)}_{= f(x)}$$

$$\Leftrightarrow c'(x) = f(x) \cdot e^{A(x)}$$

$$\Leftrightarrow c(x) = \int f(x) \cdot e^{A(x)} + c \quad , c = \text{const}$$

Diese Fkt $c(x)$ setzen wir in (1) ein.

$$y(x) = \left(\int f(x) \cdot e^{A(x)} + c \right) \cdot e^{-A(x)} \text{.} \quad \blacksquare$$