Beweis v. Satz 2.6.:

- Wir wissen, dass $F(x)$ die Stammfkt von $f(x)$ ist, d.h. $\int f(x)dx = F(x) + C$, $C = $ const. bzw. $\int_{x_0}^{x} f(s)ds = F(x) - F(x_0)$ und

$G(y(x))$ die Stammfkt von $\frac{1}{g(y(x))}$,

d.h. $\int \frac{1}{g(y)} dy = G(y) + D$, $D = $ const, bzw.

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y)} dy = G(y) - G(y_0).$$

- Zuerst zeigen wir, dass

$$y(x) = G^{-1}(G(y_0) + (F(x) - F(x_0))) \quad (1)$$

die Anfangsbed. erfüllt. Es gilt:

$$y(x_0) = G^{-1}(G(y_0) + \underbrace{(F(x_0) - F(x_0))}_{=0}) = y_0 \quad ✓$$

- Jetzt zeigen wir, dass (1) Lösung von

$$y' = f(x) \cdot g(y) \text{ ist.} \quad (2)$$

Es gilt:

Aus (1) folgt

$$G(y(x)) = G(y_0) + (F(x) - F(x_0)).$$

Die letzte Gl. differenzieren wir und erh.:

$$\underbrace{G'(y(x))}_{\frac{1}{g(y(x))}} \cdot y'(x) = \underbrace{F'(x)}_{=f(x)} .$$

Daraus folgt: $\frac{1}{g(y)} \cdot y' = f(x)$

$$\Rightarrow y' = f(x) \cdot g(y) \quad \checkmark$$

- Schließlich zeigen wir, die Eindeutigkeit dieser Lösung, die sich aus d. Gl.

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \quad \text{ergibt;}$$

<u>Dazu:</u> Sei $y(x)$ eine Lsg von (2) mit $y(x_0) = y_0$.

Da $g \neq 0$ auf J, gilt:

$$f(x) = \frac{y'(x)}{g(y(x))} \quad \text{und folglich}$$

$$\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y(t))}\,dt .$$

Wir substituieren $y(t) =: u$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds}_{=F(x)-F(x_0)} = \int_{\underbrace{y(x_0)}_{=y_0}}^{y(x)} \frac{du}{g(u)} = G(y(x)) - G(y_0)$$

$$\Rightarrow F(x) - F(x_0) = G(y(x)) - G(y_0)$$

$$\Rightarrow G(y(x)) = G(y_0) + (F(x) - F(x_0))$$

$$\Rightarrow y(x) = G^{-1}\left(G(y_0) + (F(x) - F(x_0))\right) \quad \blacksquare$$

__Bemerkung:__ Man kann zuerst das unbestimmte Integral lösen und die allg. Lsg erhalten. Danach kann man daraus jede part. Lsg berechnen.

__Lösung v. Bsp. 2.7__

Beh. $y' = x \cdot y - 2y, \quad y(1) = 2.$

$$\Leftrightarrow y' = (x-2) \cdot y$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = (x-2) \qquad \text{für } y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int (x-2)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} - 2x + C, \qquad C = \text{const}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{\frac{x^2}{2} - 2x + C} = \underbrace{e^C}_{=: D} \cdot e^{\frac{x^2}{2} - 2x} = D \cdot e^{\frac{x^2}{2} - 2x}$$

$D = \text{const}$

d.h. $\underline{y = D \cdot e^{\frac{x^2}{2} - 2x}}$ ist die allg. Lsg.

Jetzt berechnen wir noch die part. Lsg für $y(1)=2$, d.h. $x_0=1$, $y_0=2$

Es gilt: $2=y(1)=D\cdot e^{\frac{1}{2}-2}=D\cdot e^{-\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow 2\cdot e^{\frac{3}{2}}=D$

$\Rightarrow y(x)=2\cdot e^{\frac{3}{2}}\cdot e^{\frac{x^2}{2}-2x}$ ist eine part. Lsg

und Lsg des AWPs. $\square$