Eigenschaften mobiler und eingebetteter Systeme:

Regelungen

Dr.-Ing. Matthias Werner
Dipl.-Inf. Jan Richling
Wintersemester 2001/2002

Regelungstechnik

Viele eingebettete Systeme dienen dazu, Regelungen zu realisieren.

Regelungstechnik befaßt sich mit der Aufgabe, einen sich zeitlich verändernden Prozeß von außen so zu beeinflussen, daß die zeitliche Veränderungen in einer vorgegebenen Weise ablaufen.

Beispiele:

- Führung eines Robotereffektors von einem Punkt zum anderen
- Halten einer bestimmten Raumtemperatur trotz Sonneneinstrahlung und anderen Einflüssen

Grundlegende Begriffe (I)

dynamisches System (auch: dynamischer Prozeß): Funktionseinheit, deren wichtigste Kenngrößen sich zeitlich ändern und deshalb als Funktionen der Zeit $f(t)$ dargestellt werden können

Eingangsgrößen: wirken auf ein System und verursachen zeitliche Änderungen

Ausgangsgrößen: Verhalten des Systems als Reaktion auf die Eingangsgrößen

Rückkopplung: Ausgangsgrößen eines Systems werden (nach evtl. Umformung) wieder als Eingangsgrößen genutzt

Grundlegende Begriffe (II)

Steuerung (allgemein): zielgerichtete Beeinflussung eines dynamischen Systems

Steuerung, (spezifisch): zielgerichtete Beeinflussung eines dynamischen Systems ohne Berücksichtigung der Ausgangsgrößen, d.h., ohne Rückkopplung

Regelung: Steuerung mit Rückkopplung

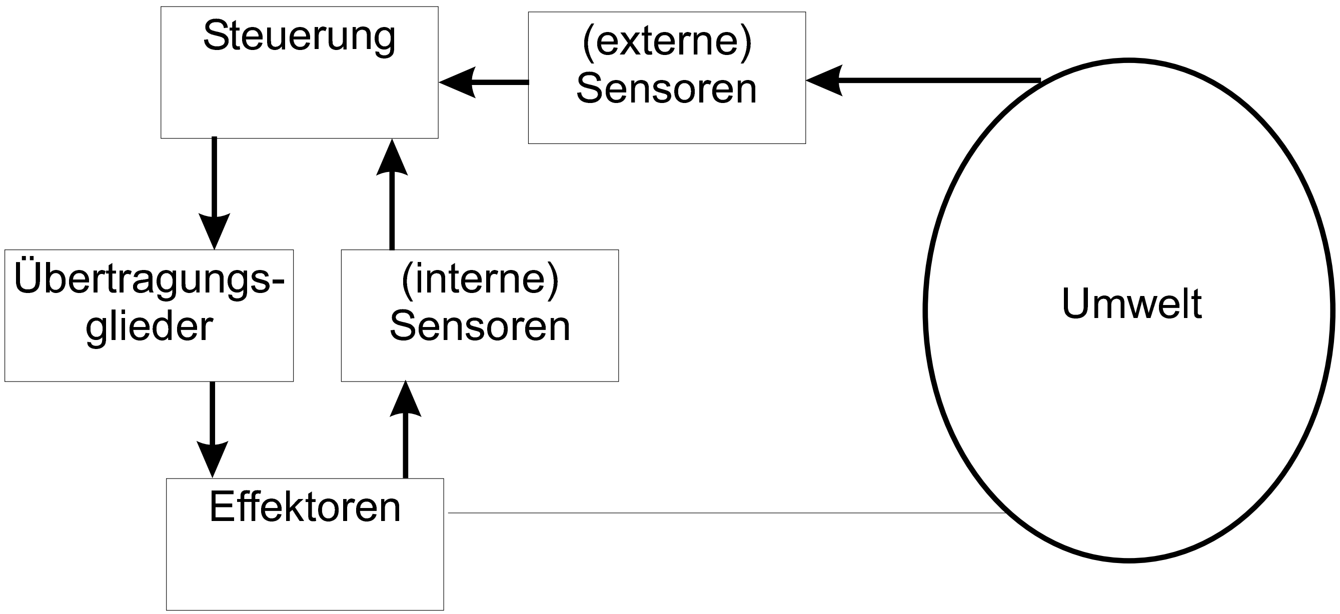
Regelungsaufgabe

Gegeben ist ein dynamisches System (*Regelstrecke*) mit von außen beeinflußbaren Größen (*Stellgrößen*) und meßbaren Größen (*Regelgrößen*). Weiterhin ist ein Regelziel gegeben, typischerweise eine oder mehrere Regelungsgrößen auf konstanten Werten zu halten oder in einer vorgegebenen Weise zu verändern.

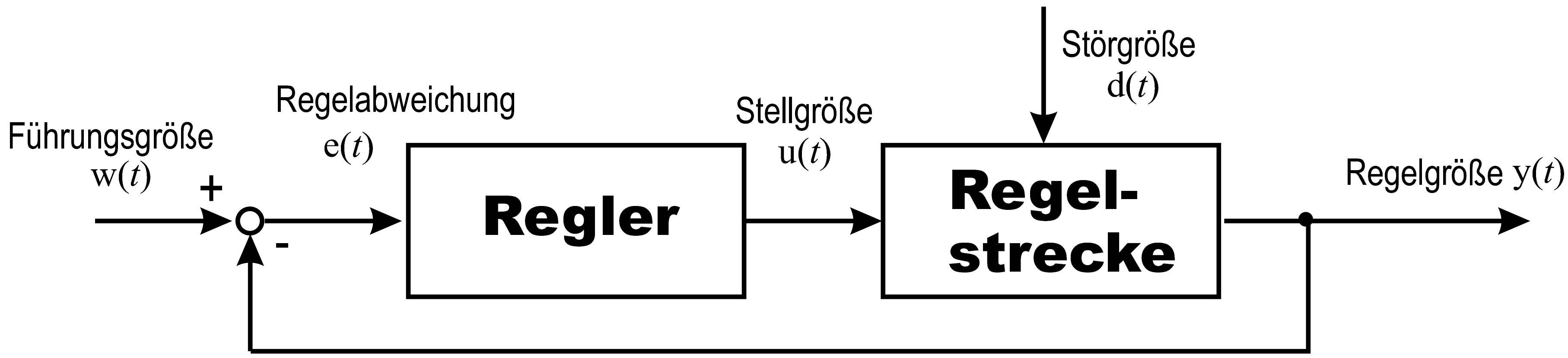
Gesucht ist eine Regelungseinrichtung (*Regler*), die das Regelungsziel erfüllt.

Architektur

Eine typische Architektur eines eingebetteten Systems:

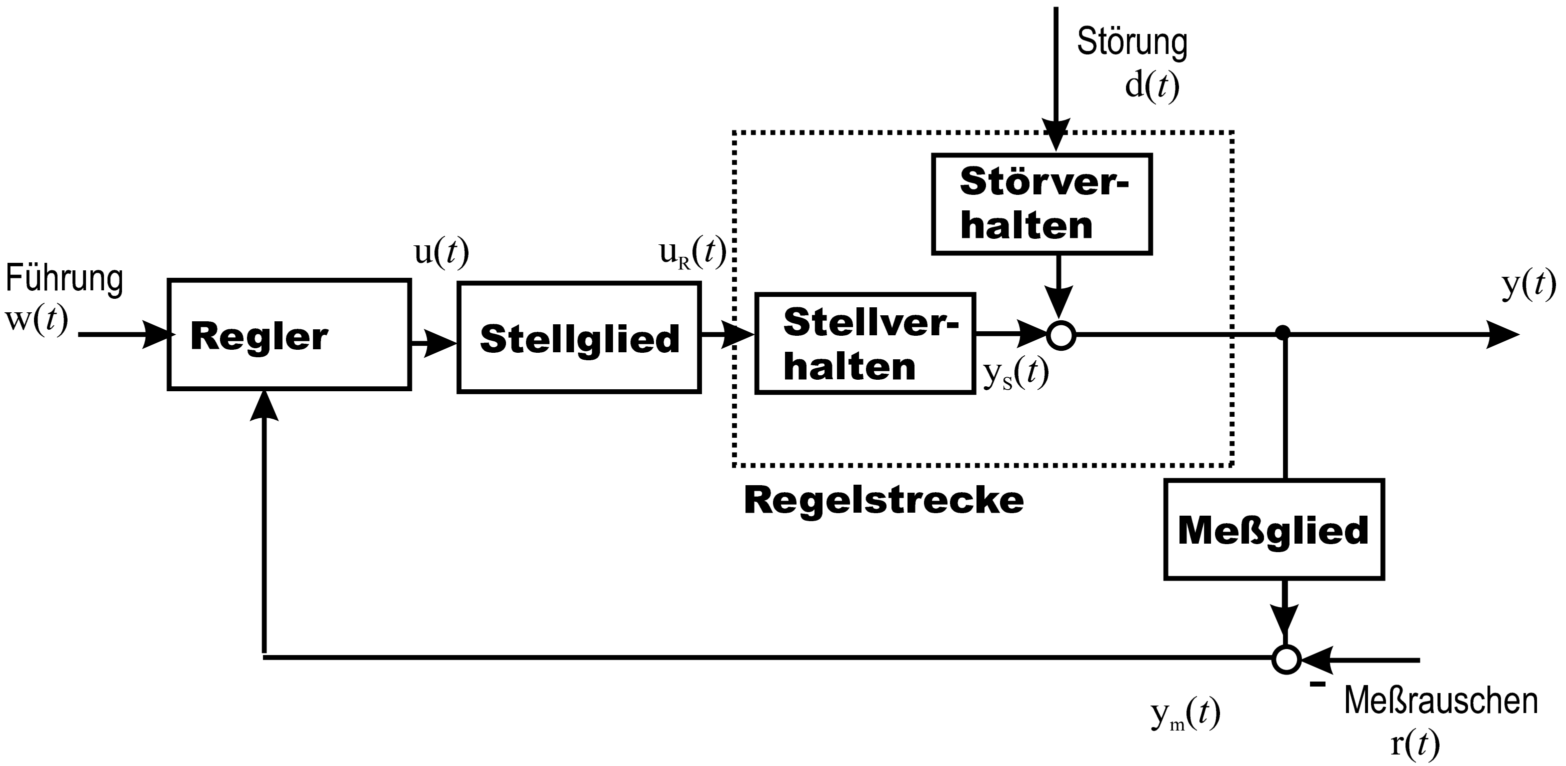


Grundstruktur eines Regelungskreis



- Blöcke stellen Verarbeitungseinheiten, d.h. dynamische Systeme dar (Übertragungsglieder). Sie sind rückwirkungsfrei
- Pfeile stellen veränderliche Größen (Signale) dar
- Gefüllte Kreise sind *Signalverzweigungen und ungefüllte Kreise sind* Summationsstellen

Erweiterte Grundstruktur eines Regelungskreises



Probleme in der Regelungstechnik

- *Modellbildung* oder *Identifizierung*
  Das Verhalten einer Regelstrecke soll bestimmt und beschrieben werden

- Beschreibung *rückgekoppelter Systeme*
  Das Verhalten von Strecken ändert sich, wenn Rückkopplungen existieren.
  Das neue Verhalten soll bestimmt werden.

- *Reglerentwurf*
  Es soll ein Regeler gefunden, der die gewüschte Regelaufgabe erfüllt.

Themen in EMES

Wir betrachten in EMES:

- Systemmodellierung analoger linearer Systeme im Zeitbereich
- Systemmodellierung analoger linearer Systeme im Frequenzbereich
- Einfache Regler
- (Systemmodellierung diskreter linearer Systeme)

Beschreibung linearer Übertragungsglieder mit DGL I

- Das Übertragungsverhalten von dynamischen Systemen läßt sich in der Regel mit einer Differentialgleichung beschreiben, die den Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ darstellt:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_q \frac{d^q u}{dt^q} + b_{q-1} \frac{d^{q-1} u}{dt^{q-1}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t)$$

bzw.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_q y^{(q)} + b_{q-1} u^{(q-1)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

- Annahme: $q \leq n$

Beschreibung linearer Übertragungsglieder mit DGL II

- Ein Übertragungsglied heißt *linear*, wenn das Superpositionsprinzip gilt, also

$$u(t) = k \cdot u_1(t) + l \cdot u_2(t) \;\rightarrow\; y(t) = k \cdot y_1(t) + l \cdot y_2(t)$$

- Die DGL hat für gegebene Eingangsgrößen $u(t), t \geq 0$ eine eindeutige Lösung $y(t), t \geq 0$ wenn die Anfangsbedingungen $y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n}$ gegeben sind:

$$y^{(n-1)}(0) = y_{0n}, \quad \ldots, \quad \dot{y}(0) = y_{02}, \quad y(0) = y_{01}$$

Darstellung im Zustandsraum

DGL höherer Ordnung sind nicht leicht überschaubar.

Idee: Überführung der DGL in Differentialgleichungssysteme (DGLS) 1. Ordnung, wobei die Eingangs- und Ausgangssignale in Abhängigkeit eines Zustandes $\vec{x}$ dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\vec{x} &= \mathbf{A}\vec{x}(t) + \vec{b}u(t) \\
y(t) &= \vec{c} \cdot \vec{x}(t) + du(t) \\
\vec{x}(0) &= \vec{x}_0
\end{aligned}$$

Obwohl wir eine Vektorgleichung haben, betrachten wir den skalaren Ansatz und übertragen dann einfach die Ergebnisse.

Lösung linearer DGL 1. Ordnung

Aus Mathematik bekannt: Lineare, homogene DGL 1. Ordnung

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t), \quad x(0) = x_0$$

hat die allgemeine Lösung

$$x(t) = x_0 \cdot e^{a \cdot t}$$

Lösung der inhomogenen DGL

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) + b \cdot u(t), \quad x(0) = x_0$$

erhält man durch *Variation der Konstanten*.

Allgemeine Lösung der DGL ist:

$$x(t) = \underbrace{x_0 \cdot e^{a \cdot t}}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\int_0^t e^{-a(t-\tau)} \cdot b \cdot u(\tau)\, d\tau}_{\text{partikuläre Lösung}}$$

Bewegungsgleichung

Es wird ersetzt: $e^{a \cdot t} = \Phi(t)$.

Man erhält die *Bewegungsgleichung* des durch die DGL beschriebenen Systems:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau) \cdot b \cdot u(\tau) d\tau$$

Interpretation:
Der erste Summand $\Phi(t)x_0$ beschreibt die *Eigenbewegung* (oder *freie Bewegung*), d.h. dasjenige Verhalten, das das System ohne Anregung von außen nur aufgrund seines Anfangszustandes x_0 ausführt.

Die partikuläre Lösung $\int_0^t \Phi(t - \tau) \cdot b \cdot u(\tau) d\tau$ beschreibt die *erzwungene Bewegung* des Systems.

Da das System linear ist, überlagern sich beide Bewegungen additiv.

Eigenbewegung

$e^{a \cdot t} = \Phi(t)$, drei typische Fälle:

- $a < 0$: Die Eigenbewegung klingt ab und geht asymptotisch in den Ruhezustand $x = 0$ über
- $a = 0$: Das System verharrt in seinem Anfangszustand
- $a > 0$: Das System schwingt sich auf, d.h., die Zustandsgröße wächst exponentiell über alle Grenzen hinweg

Erzwungene Bewegung

Beispiel: Erregung durch Einheitssprung $u(t) = \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow \quad t < 0 \\ 1 & \Leftarrow \quad t \geq 0 \end{cases}$

Für $x_0 = 0$ ergibt sich (Substitution von $t - \tau$ durch θ):

$$x(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot b \, d\tau = \int_0^t e^{a\theta} b \, d\theta = \begin{cases} \frac{b}{a}(e^{a \cdot t} - 1) & \Leftarrow \quad a \neq 0 \\ bt & \Leftarrow \quad a = 0 \end{cases}$$

Wieder können drei Fälle unterschieden werden:

- $a < 0$: Das System nähert sich asymptotisch dem Endwert $-\frac{b}{a}$
- $a = 0$: Der Zustand verläuft auf einer Geraden
- $a > 0$: Der Zustand wächst exponentiell über alle Grenzen

Lösung der Zustandsgleichung

Zurück zum Vektoransatz:

Die Lösung der Zustandsgleichung erster Ordnung $\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{b}u(t)$ erfolgt analog. Der Ansatz ist:

$\vec{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\vec{k}$

Dabei wird $e^{\mathbf{A}t}$ über die Taylor-Reihe definiert:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i t^i}{i!} = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \frac{\mathbf{A}^3}{3!}t^3 + \cdots$$

Nach ähnlichem Vorgehen wie weiter vorn erhält man die Bewegungsgleichung:

$$\vec{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\vec{x}_0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\vec{b}u(t)\,d\tau; \quad \mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

Übertragungsverhalten

- Aufschwingende Systeme sind “uninteressant”.
- Bei abklingenden Systemen verschwindet die Eigenbewegung
- Künftig Betrachtung von *eingeschwungenen* Systemen im Ruhezustand ($\vec{x}_0 = \vec{0}$)
- Betrachtung des *Übertragungsverhaltens*, d.h. der Abhängigkeit der Ausgangsgröße vom Eingang

$$y(t) = \vec{c} \cdot \vec{x} + d \cdot u(t) = \int_0^t \vec{c} \cdot \mathbf{\Phi}(t - \tau) \cdot \vec{b} \cdot u(\tau)\, d\tau + d \cdot u(t)$$

Übergangsfunktion

Die Übergangsfunktion beschreibt, wie das System auf eine sprungförmige Eingangsgröße reagiert. Die Eingangsgröße wird durch die Sprunghöhe u_0 und die Sprungfunktion $\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow & t < 0 \\ 1 & \Leftarrow & t \geq 0 \end{cases}$ (Heaviside-Funktion) bestimmt: $u(t) = u_0 \cdot \mathbf{1}(t)$

Die Ausgangsgröße wird wird als *Sprungantwort* bezeichnet. Ist $u_0 = 1$, so spricht man von der Übergangssfunktion $h(t)$

$$h(t) = \int_0^t \vec{c} \cdot \mathbf{\Phi}(\tau) \cdot b \, d\tau + d$$

Gewichtsfunktion

Die *Gewichtsfunktion* kann helfen, unmittelbar die Antwort eines Systems auf eine beliebige Erregung zu berechnen.

Sie ist die Antwort des Systems auf eine *Dirac-Impuls*:

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to \infty} \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \Leftarrow \quad 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0 & \Leftarrow \quad sonst \end{cases}$$

$$g(t) = \vec{c} \cdot \mathbf{\Phi}(t) \cdot \vec{b} + d \cdot \delta(t)$$

Es gilt: $h(t) = \int\limits_0^t g(\tau)\, d\tau$ und $g(t) = \frac{d}{dt} h$

Darstellung des E/A-Verhaltens

Die Antwortfunktion kann mit der Gewichtsfunktion wie folgt dargestellt werden:

$$y(t) = \vec{c} \cdot \mathbf{\Phi}(t) \cdot \vec{x}_0 + \int\limits_0^t g(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

Die rechte Seite enthält ein *Faltungsintegral*, das durch den Operator $*$ abgekürzt wird.

$$g(t) * u(t) = \int\limits_0^t g(t-\tau)\, u(t)\, d\tau$$

Damit kann die Reaktion jedes Systems auf eine Erregung aus dem Ruhezustand beschrieben werden: $y(t) = g(t) * u(t)$

Typische Übertragungsglieder

Anhand der Übergangsfunktion können einige typische elementare Übertragungsglieder beschrieben werden:

- Proportionalglieder
- Integralglieder
- Differentialglieder
- Totzeitglieder

Proportionalglieder (P-Glieder)

Unter Proportionalgliedern (P-Gliedern) werden dynamische Übertragungsglieder verstanden, die für konstante Eingangsgrößen im stationären Zustand eine dem Wert der Eingangsgröße proportionale Ausgangsgröße aufweisen.

Das verzögerungsfreie P-Glied hat stets ein Ausgangssignal mit dem k_s-fachen Wert des Eingangs:

$$y(t) = k_s u(t)$$

Die Übergangsfunktion ist $h(t) = k_s$.

PT$_n$-Glieder

Reagiert das Übertragungsglied proportional aber verzögert zur Eingangsgröße, so spricht man von einem PT_n- *Glied*. n gibt dabei die Systemordnung an.

Ein PT_1-Glied ist also ein proportional wirkendes Verzögerungsglied erster Ordnung.

DGL: $T\dot{y} + y(t) = k_s u(t)$, $y(0) = y_0$

Zustandsraummodell: $\dot{x} = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{1}{T}u(t)$, $x(0) = \frac{1}{k_s}y_0$, $y(t) = k_s x(t)$

Übergangsfunktion: $h(t) = k_s(1 - e^{-\frac{t}{T}})$

Entsprechend können PT_n-Glieder höherer Ordnung gebildet werden.

Integralglieder

Integralglieder (I-Glieder) sind Übertragungsglieder, deren Ausgang bei konstanter Eingangsgröße für große Zeiten in eine Rampenfunktion übergeht.

DGL: $T_I \dot{y} = u(t))$, $y(0)$ bzw. $y(t) = \frac{1}{T_I} \int\limits_0^t u(\tau)\, d\tau + y(0)$

Zustandsraum: $\dot{x} = \frac{1}{T_I} u(t))$, $x(0) = y_0$, $y(t) = x(t)$

Übergangssfunktion: $h(t) = \frac{1}{T_I} t$

Wie bei den P-Gliedern gibt es auch IT_n-Glieder, die eine Verzögerung n-ten Grades bewirken.

Differentialglieder

Differentialglieder (D-Glieder) sind Übertragungsglieder, deren Ausgang im stationären Zustand null ist. Der Ausgang wird durch Änderungen am Eingang bestimmt.

DGL: $y(t) = T_D \frac{d}{dt} u$

Ein reines D-Glied erfüllt nicht die Kausalbedingung und kann daher nicht im Zustandsraum beschrieben werden. Dies ist unproblematisch, da es keine physikalischen Systeme mit unverzögerten D-Verhalten gibt.

Übergangssfunktion: $h(t) = T_D \delta(t)$

Das DT_1-Glied heißt *Vorhalteglied*. Es hat die DGL

$T\dot{y} + y(t) = T \cdot T_D \cdot \dot{u}$

Totzeitglieder

Totzeitglieder T_t-Glieder verschieben das Eingangsignal auf der Zeitachse nach rechts:

$$y(t) = u(t - T_t)$$

Übergangssfunktion: $h(t) = \mathbf{1}(t - T_t)$

Totzeitglieder treten meist kombiniert mit anderen Übertragungsgliedern auf.

Beschreibung linearer Systeme im Frequenzbereich

- Analyse von Systemen im Zeitbereich ist häufig komplex
- Beschränkung auf *eine* spezielle Art von Signalen würde Sache erleichtern
- Funktionen können durch Summen anderer Funktionen dargestellt werden (Bsp.: jedes periodische Funktion durch Summe über $\sin$-Funktionen)
- Superpositionsprinzip erlaubt einzelne Betrachtung für jede solche spezielle Funktion

Mögliches Vorgehen

1. Zerlegung der Eingangsgröße $u(t)$ in sinusförmige Anteile

2. Getrennte Berechnung der Systemantworten für jeden einzelnen sinusförmigen Anteil von $u(t)$

3. Bestimmung der Ausgangsgröße $y(t)$ durch Überlagerung aller berechneten Systemantworten

Praktisches Vorgehen: Fourier-Transformation

Nach dem Fouriertheorem lassen sich periodische Funktionen $f(t)$ mit der Periode T (und damit der Frequenz $f_0 = \frac{1}{f_0}$ und der Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi f_0$) in eine Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen zerlegen, deren Kreisfrequenzen ganzzahlige Vielfache von ω_0 sind:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega_0 t)$$

Die Kooeffizienten lassen sich dabei wie folgt errechnen:

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt \qquad \text{und} \qquad B_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

Exponentialdarstellung der Fourierreihe (I)

Eulersche Formel: $k\,e^{j\phi} = k(\cos\phi + j\sin\phi)$

Folglich:

$\cos(k\omega_0 t) = \frac{-e^{j\,k\,\omega_0\,t} + e^{-j\,k\,\omega_0\,t}}{2}$ und $\sin(k\omega_0 t) = \frac{-e^{j\,k\,\omega_0\,t} - e^{-j\,k\,\omega_0\,t}}{2j}$

Eingesetzt in Fourierreihe:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{A_k}{2}(e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}) + \tfrac{B_k}{2j}(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t})\right) \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(A_k - jB_k)e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(A_k + jB_k)e^{-jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

Sei $F_k = \frac{1}{2}(A_k - jB_k)$, $F_{-k} = \frac{1}{2}(A_k + jB_k)$ und $F_0 = \frac{A_0}{2}$

$\Rightarrow f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$

Zerlegung nichtperiodischer Signale

Auch nichtperiodische Funktionen lassen sich darstellen, allerdings reichen dann nicht mehr abzählbar unendlich viele Glieder aus.

Deshalb geht man von der Summe zum Integral und zu kontinuierlichen Kreisfrequenzen ω über:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\text{mit } F(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Während $f(t)$ eine Funktion in Abhängigkeit von der Zeit ist, stellt $F(t)$ die *gleiche (!)* Funktion dar, nur in Abhängigkeit von einer Frequenz.

Fouriertransformation

Man bezeichnet $F(j\omega)$ als *Fouriertransformierte* der Funktion $f(t)$ und spricht von der Darstellung im *Zeitbereich* ($f(t)$) bzw. im *Frequenzbereich* (oder *Bildbereich*, $F(j\omega)$).

Statt des Integrals schreibt man

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\},$$

für die Umkehroperation

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$$

Fouriertransformation führt uns fast zum Ziel, nur noch Übertragungen von Sinusschwingungen betrachten zu müssen.

Probleme mit der Fouriertransformation

Problem: Transformation funktioniert nur, wenn die *Dirichletschen Bedingungen* erfüllt sind:

- $f(t)$ darf nur endlich oft unstetig sein, wobei an jeder Unstetigkeitsstelle $\bar{t}$ die Werte $f(\bar{t}+0)$ und $f(\bar{t}-0)$ definiert sein müssen
- Es muß $\int\limits_{-T_0}^{T_0} |f(t)|dt < \infty$ gelten, d.h. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$

Die Zweite Bedingung bedeutet, daß $f(t)$ bei großen t gegen null gehen muß. In der Regelungstechnik kommen aber häufig Signale vor, bei denen das nicht der Fall ist.

Außerdem hat die häufig verwendeter Sprungfunktion $\mathbf{1}(t)$ keine Transformierte.

Laplace-Transformation (I)

Um die Schwierigkeiten mit der Fouriertransformation lassen sich umgehen, wenn man statt des eigentlichen Signals $f(t)$ das modifizerte Signal

$$\bar{f}(t) = f(t)e^{-\delta t}, \quad \delta \geq 0 \text{ benutzt.}$$

Wenn $f(t)$ nicht stärker als exponential wächst und δ hinreichend groß ist, sind die Dirichletschen Bedingungen erfüllt. Folglich kann auf $\bar{f}(t)$ die Fouriertransformation angewandt werden:

$$\begin{aligned} \bar{F}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\delta+j\omega t)}dt \\ &= F(\delta + j\omega) \end{aligned}$$

Laplace-Transformation (II)

$\delta + j\omega$ kann als komplexe Frequenz aufgefaßt werden:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s \cdot t} dt$$

Da in der Regelungstechnik nur Signale betrachtet, die für $t < 0$ verschwinden, vereinfacht sich das Integral:

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-s \cdot t} dt$$

Dies wird *Laplace-Transformation* genannt und mit

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ oder $F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, f(t)$ bezeichnet.

Eigenschaften der Laplace-Transformation (I)

- **Überlagerungssatz:** $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
- **Ähnlichkeitssatz:** $f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{a}\, F(\frac{s}{a}),\ a \neq 0$
- **Verschiebungssatz:** $f(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-sT} F(s)$
- **Dämpfungssatz:** $e^{at} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s-a)$
- **Differentiationssatz:** $\frac{d}{dt} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; sF(s) - f(-0)$

  ...und für höhere Ableitungen:

  $\frac{d^k}{dt^k} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; s^k F(s) - s^{k-1} f(-0) - s^{k-2} \dot{f}(-0) - \cdots - f^{(k-1)}(-0)$

Eigenschaften der Laplace-Transformation (II)

- **Integrationssatz:** $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}F(s)$

- **Differentiation der Bildfunktion:** $t^k f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}F(s)$

- **Faltungssatz:** $f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F_1(s)F_2(s)$

- **Anfangswertsatz:** $f(+0) = \lim\limits_{t\to+0} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} s\ F(s)$

- **Endwertsatz:** $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} s\ F(s)$

Übertragungsfunktion im Bildbereich

Der Gewichtsfunktion $g(t)$ im Zeitbereich steht die *Übertragungsfunktion* $G(s)$ im Bildbereich gegenüber:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Zu $y(t) = g(t) * u(t)$ gibt es die Analogie im Bildbereich:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Die Übertragungsfunktion kann als *komplexer Frequenzgang* für exponentiell aus- bzw. abklingende Funktion verstanden werden, der angibt, welche Amplitude und Phasenverschiebung von einem Übertragungsglied bewirkt wird.

Bestimmung der Übertragungsfunktion

Die ein Übertragungsglied beschreibende DGL

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_q \frac{d^q u}{dt^q} + b_{q-1} \frac{d^{q-1} u}{dt^{q-1}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t)$$

kann in den Bildbereich gebracht werden. Dann erhält man unter Verwendung des Überlagerungs- und des Differentiationssatzes:

$$Y(s)(a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0) = U(s)(b_q s^q + \cdots + b_1 s + b_0)$$

Daraus läßt sich folgende Beziehung ablesen:

$$G(s) = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Berechnung des Systemverhaltens mit Hilfe der Übertragungsfunktion

Gegeben: Übertragungsfunktion $G(s)$, Eingangsgröße $u(t)$

1. Berechnung der Laplacetransformierten des Eingangssignals $u(t)$ unter Verwendung der Laplacetransformation:

   $$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

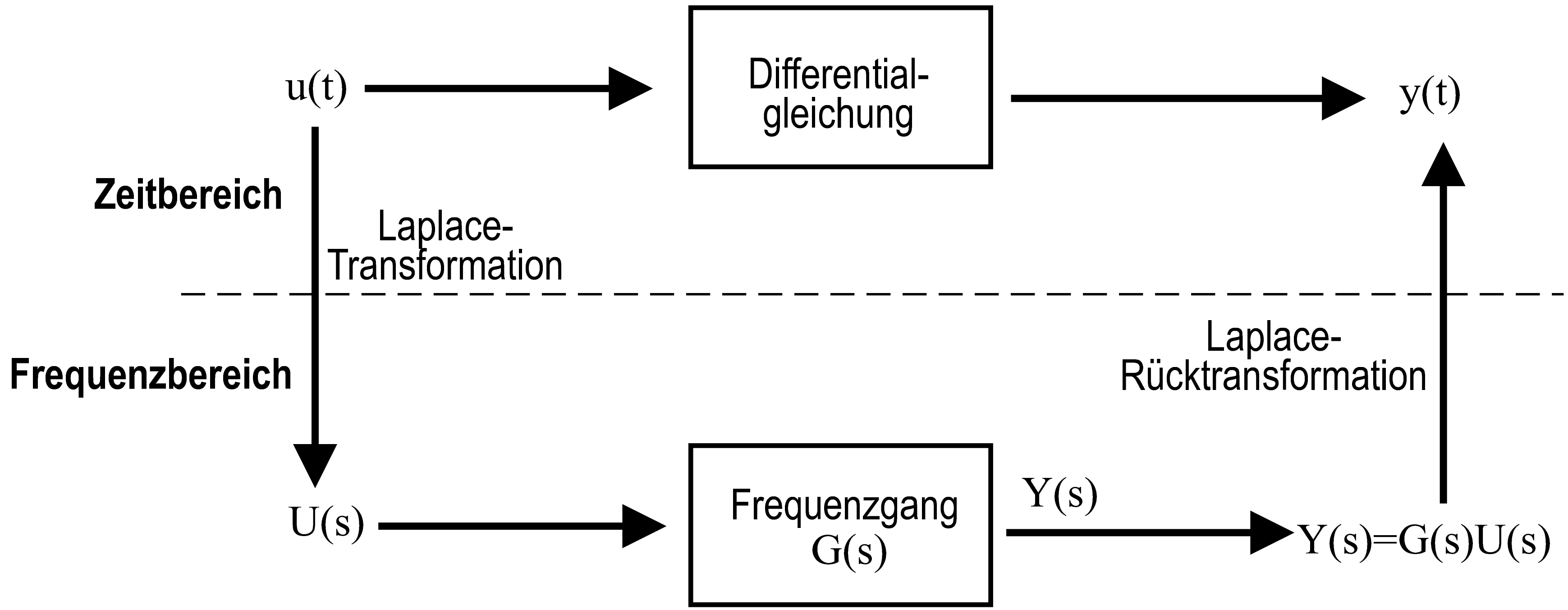
2. Berechnung der Transformierten der Ausgangsgröße:

   $$Y(s) = G(s)U(s)$$

3. Bestimmung des Ausgangssignals $y(t)$ durch Rücktransformation:

   $$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

Rechenschema für die Berechnungs des Systemverhaltens mit Hilfe der Laplace-Transformation



Die inverse Laplace-Transformation

- **Der harte Weg:** Berechnung des Umkehrintegrals

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

- **Der lange Weg:** Partialbruchzerlegung und Rücktransformation der einzelnen Glieder

  Jedes der normalerweise vorkommenden Glieder hat eine gebrochen rationale Übertragungsfunktion. Ausnahme: Totzeitglied mit $g(t) = \delta(t - T_t)$ und $G(s) = e^{-sT_t}$.

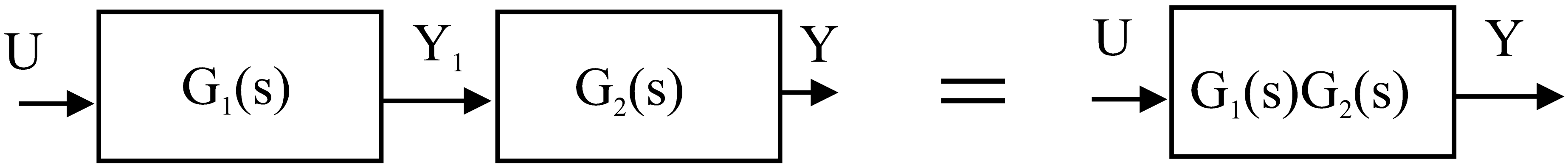
Korrespondenzen

$F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\delta(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{1}{s}$	$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{1+sT}$	$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{1}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$	$1 - \frac{T_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}$

Reihenschaltung

Bei zwei aufeinanderfolgenden Übertragungsgliedern wirkt das Ausgangssignal des ersten Gliedes als Eingangssignal für das nächste Glied. D.h., $U_2(s) = Y_1(s)$. Daraus folgt:

$$G(s) = G_2(s)G_1(s)$$



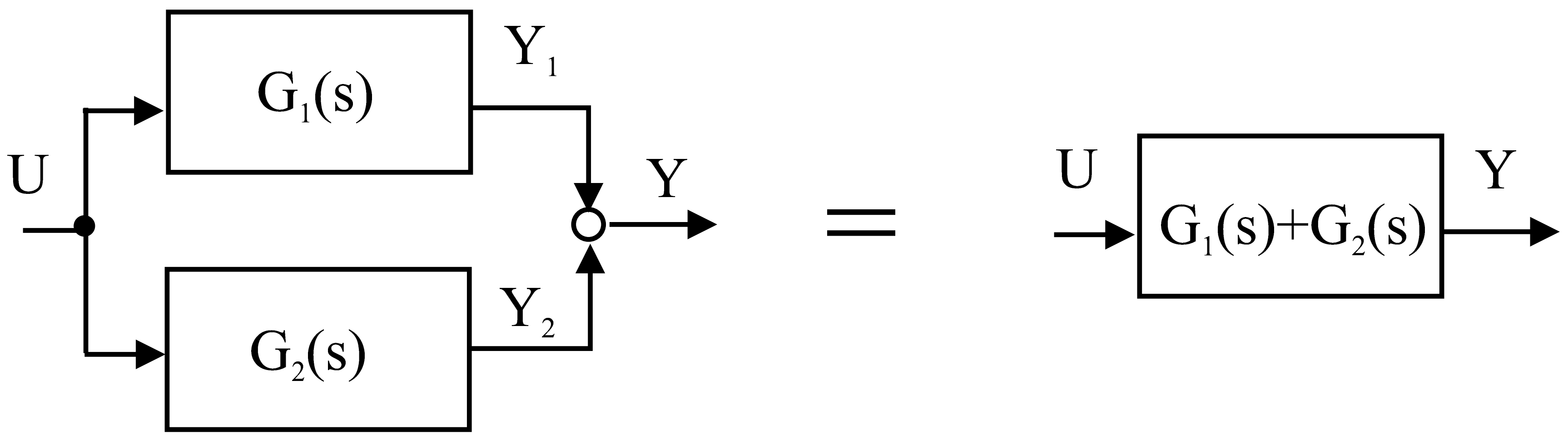
Im Zeitbereich entspricht dies einer Faltung:

$$g(t) = g_2(t) * g_1(t)$$

Parallelschaltung

Wenn zwei Übertragungsglieder parallel liegen, so gilt das Superpositionsprinzip. Deshalb ist das Ausgangssignal im Bild- und im Zeitbereich jeweils die Summe der Ausgangssignale:

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) \text{ und } g(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

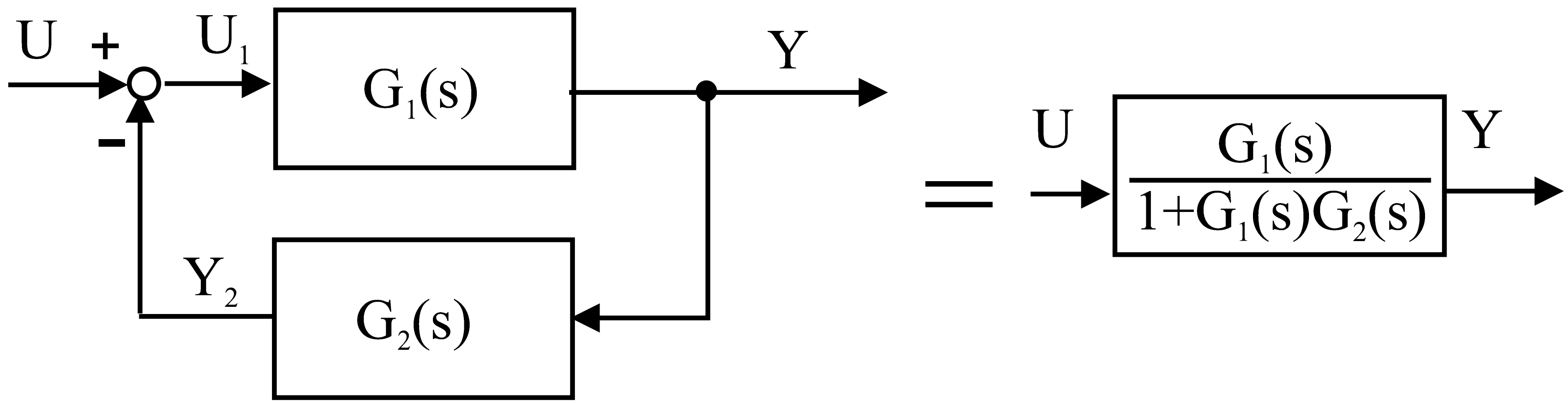


Rückkopplung

Bei Rückkopplung gilt: $Y(s) = Y_1(s)$ und $U_1(s) = U(s) - Y_2(s)$

Folglich: $Y(s) = G_1(s)U(s) - G_1(s)G_2(s)Y(s)$ und somit:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}U(s), \text{ d.h. } G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$



Im Zeitbereich gibt es keine explizite Darstellung.

Verschiedene Übertragungsfunktionen

- **Proportionalglied, P-Glied:** $G(s) = k_s$
- **Verzögerungsglied 1. Ordnung, PT$_1$-Glied:** $G(s) = \frac{k_s}{1 + sT}$
- **Verzögerungsglied 2. Ordnung, PT$_2$-Glied:** $G(s) = \frac{k_s}{1 + 2dTs + T^2 s^2}$
- **Integralglied, I-Glied:** $G(s) = \frac{1}{sT_I}$
- **Differentialglied, D-Glied:** $G(s) = sT_D$
- **Totzeitglied, T$_T$-Glied:** $G(s) = e^{-sT_t}$

Regelungsaufgabe

Nachdem man in der Lage ist, das Verhalten eines Systems zu beschreiben, stellt sich die Frage, wie dieses Verhalten auf gewünschte Weise beeinflußt werden kann.

Regelungsaufgabe

Gegeben sind:

1. Das Modell der Regelstrecke (Übertragungsfunktion)
2. Forderung an das Verhalten des geregelten Systems

Gesucht ist ein Regeler, so daß der entstehende Regelkreis die gegebenen Güteforderungen erfüllt.

Güteforderungen

- Stabilität

  Ein stabiler Regelkreis reagiert auf endliche Erregungen mit endlichen Ausgangssignalen. Insbesondere klingen seine freien Bewegungen und sein Übertragungsverhalten ab:

  $\lim_{t \to \infty} y_{frei}(t) = 0$ und $\lim_{t \to \infty} y_{ü}(t) = 0$

- Störkompensation und Sollwertfolge

  Die Regelgröße soll der Führungsgröße asymptotisch folgen:

  $\lim_{t \to \infty} (w(t) - y(t)) = 0$

- Dynamikforderungen

Prinzipielle Wirkungsweise einer Regelung

1. **Messen.** Die Regelgröße wird entweder direkt gemessen oder — bei nicht meßbarern Regelgrößen wie z.B. Qualitätskennwerten — aus anderen Meßgroßen berechnet.

2. **Vergleichen** Der Wert der Regelgröße wird mit dem Wert der Führungsgröße verglichen. Die Differenz ist die *Regelabweichung* $e(t) = w(t) - y(t)$

3. **Stellen** Aus der Regelgröße wird unter Berücksichtigung der dynamischen Eigenschaften der Regelstrecke die Stellgröße bestimmt.

Perfekte Regelung

In einem Perfekten Regelkreis soll der Ausgang stets der Führungsgröße folgen, während die Störgröße keinen Einfluß haben soll:

$$G_w(s) = 1,\ G_d(s) = 0$$

Sind diese Bedingungen gewährleistet, so gilt:

$$y(t) = w(t), \text{ d.h. } e(t) = 0$$

Leider gibt es im allgemeinen *keinen* perfekten Regler

Regelergesetz

Das *Reglergesetz* sagt aus, welche Stellgröße $u(t)$ für die Regelstrecke bei einer gegebenen Regelabweichung $e(t)$ vorgegeben werden soll.

Das Reglergesetz kann recht einfach sein, z.B. $u(t) = k_r e(t)$.

Obwohl das Gesetz sehr einfach sein kann, ist die *Auswahl* eines bestimmten Gesetzes für eine bestimmte Regelstrecke aufgrund der Dynamik des Systems nicht einfach.

Die Übertragungsfunktion eines Reglers, die das Reglergesetz im Bildbereich beschreibt, wird mit $K(s)$ bezeichnet

Offene Kette

In jeder Übertragungsfunktion kommt im Nenner der Term $G(s)K(s)$ vor. Dies wird als die *Übertragungsfunkiton der offenen Kette* $G_0(s)$ bezeichnet:

$$G_0(s) = G(s)K(s)$$

Ist die offene Kette stabil, so wird die statische Verstärkung

$$k_0 = G_0(0) = G(0)K(0)$$

als *Kreisverstärkung* k_0 bezeichnet.

$G_0(s)$ ist entscheidend für die Güte des Regelkreises.

Allgemeiner Lösungsweg bei Reglerentwurf

- **Wahl der Regelungsstruktur.** Es muß festgelegt werden, welche Signalverkopplungen durch den Regler herzustellen sind und wie die Regelkereisstruktur aussieht (typischerweise Standardregelkreis)

- **Wahl der Reglerstruktur.** Es ist zu entscheiden, welche Art von Regeler eingesetzt wird

- **Wahl der Regelparameter.** Die Regelparameter sind so zu wählen, daß die an den Regelkreis gestellten Güteforderungen erfüllt werden

Reglungsstruktur

- Rückführung der Ausgangsgröße
- Rückführung der Zustandsgröße
- Mehrschleifige Regelkreise
- Vermaschte Regelung
- Adaptive Regelung

Reglerstruktur

In die Reglerstruktur geht ein, welche Glieder im Regler vorhanden sind und wie sie zusammengeschaltet sind. Mitunter wird dies nur indirekt über das Entwurfsverfahren beschrieben.

Beispiele:

- PID-Regler und “Abarten”: P-Regler, I-Regler, PI-Regler, PD-Regler
- Kompensationsregler
- ICM-Regler (ICM: *Internal Model Control*)
- Dead-Beat-Regler (diskret)
- nichtlineare Regler

PID-Regler und “Abarten” (I)

Ein PID-Regler besteht aus der Parallelschaltung eines P-, eines I- und eines D-Gliedes.

P-Anteil: k_p
I-Anteil: $\frac{k_I}{s}$
D-Anteil: $k_D s$

$$K_{PID}(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s$$

In der Praxis wird der PID-Regler meist so dargestellt, daß das Proportionalglied mit einer Parallelschaltung von D-, I- und eines 1-Gliedes in Reihe geschaltet ist:

$$K_{PID}(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s = k_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D\right)$$

Dabei heißt $T_I = \frac{k_I}{s}$ *Nachstellzeit* und $T_D = \frac{k_D}{k_p}$ *Vorhaltezeit*.

PID-Regler und "Abarten" (II)

Im Zeitbereich hat der PID-Regler ein Verhalten, bei dem die Reglerausgangsgröße $u(t)$ wie folgt von der Regelabweichung $e(t)$ abhängig ist:

$$u(t) = k_P e(t) + \frac{k_P}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + k_P T_D \frac{d}{dt} e(t)$$

Aus dem PID-Regler entstehen durch Weglassen einzelner Anteile folgende Spezialfälle:

PI-Regler: $K_{PI}(s) = k_P \left(1 + \frac{1}{sT_I}\right)$

PD-Regler: $K_{PD}(s) = k_P \left(1 + sT_D\right)$

P-Regler: $K_P(s) = k_P$

I-Regler: $K_I(s) = \frac{k_p}{sT_I} = \frac{k_I}{s}$

Kriterien zur Auswahl (linearer, kontinuierlicher) Reglerstrukturen (I)

- Um zu verhindern, daß bei sprungförmigen Führungssignalen (und Störsignalen) eine bleibende Regelabweichung entsteht, muß die offene Kette ein integrales Verhalten aufweisen. Hat also die Regelstrecke kein integrales Verhalten, so muß der Regler ein I-Glied besitzen.

- Bei reinen I-Reglern steigt die Stellgröße langsam an und verändert sich nicht sprungförmig. Der I-Regler kann deshalb nicht schnell auf große Regelabweichungen reagieren.

- P- und D-Anteile beschleunigen das Übertragungsverhalten.

Kriterien zur Auswahl (linearer, kontinuierlicher) Reglerstrukturen (II)

- Insbesondere bei großer Verstärkung neigen Regelkreise mit D-Anteil zum Schwingen

- Reine D-Glieder kommen in der Praxis nicht vor. Man behilft sich mit DT_1-Gliedern mit einer sehr kleinen Verzögerung T

- Häufig werden auch *Korrekturglieder* eingesetzt, die das Verhalten der offenen Kette "korrigieren" sollen und typischerweise die Verstärkung 1 haben. Sie dienen in der Regel zur Phasenkorrektur und damit zur Erhöhung der Stabilität

PID-Regler nach Ziegler und Nichols

Viele Regelstrecken, die eine aperiodische Übertragungsfunktion besitzen, können mit einem PT_1T_t-Modell angenähert werden:

$$G(s) \approx \hat{G}(s) = \frac{k_s}{1+sT}e^{-sT_t}$$

Bei “schwachen” Güteforderungen kann eine solche Strecke ist mit einem PID-Regler geregelt werden, der folgendermaßen entworfen wird:

1. Experimentelle Bestimmung der Übertragungsfunktion der Strecke
2. Approximierung durch PT_1T_t-Glied und Bestimmung der Konstanten für die statische Verstärkung k_s, Totzeit T_t und der Zeitkonstante T
3. Einstellung der PID-Parameter: $k_p = \frac{1,2}{k_s}\frac{T}{T_t}$, $T_I = 2T_t$, $T_D = 0,5T_t$

PID-Regler bei unbekannter Strecke

Dieser Ansatz beruht darauf, daß zunächst die Stabilitätsgrenze des proportional geregelten Systems experimentell ermittelt wird.

Er kommt ohne Streckenmodell aus, ist aber nur einsetzbar, wenn Prozesse bis an (und evtl. über) die Stabilitätsgrenze gefahren werden können:

1. Der Regelkreis wird mit Hilfe eines P-Reglers geschlossen
2. Die Reglerverstärkung wird solange erhöht, bis der geschlossene Regelkreis nach einer Sollwertveränderung eine Dauerschwingung ausführt. Die dabei eingestellte Verstärkung heißt k_{krit}, die Periodendauer der Schwingung T_{krit}
3. Einstellung der PID-Parameter: $k_p = 0,5k_{krit}$, $T_I = 0,5T_{krit}$, $T_D = 0,12T_{krit}$

Diskretisierung

Im diskreten Regelkreis wird die Ausgangsgröße nur zu bestimmten Zeitpunkten gemessen bzw. abgetastet (*Abtastzeitpunkt*).

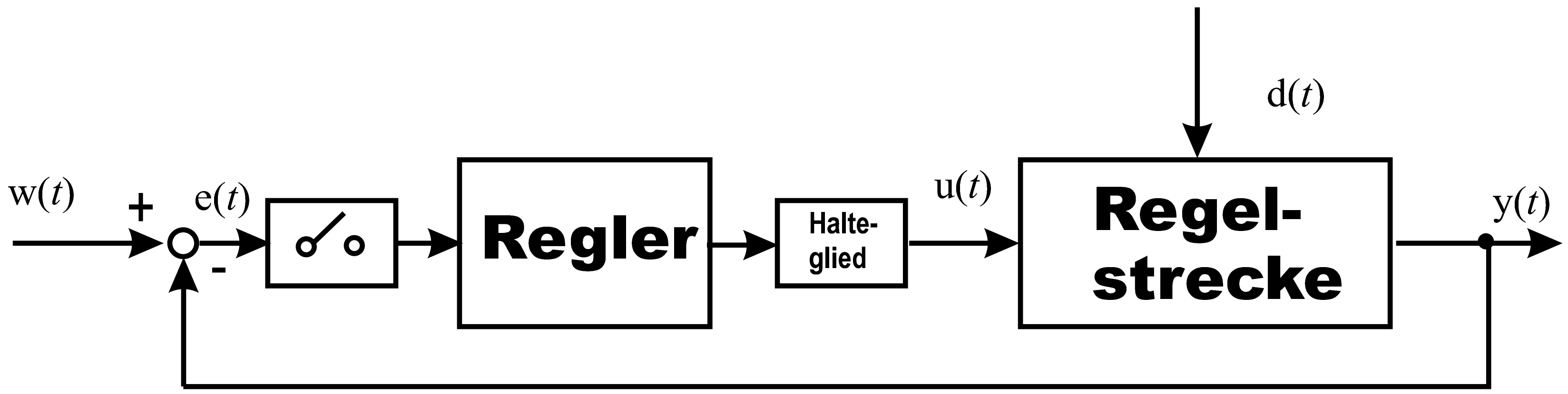
Im allgemeinen ist die Zeitspanne zwischen zwei Abtastungen konstant. Man spricht von der *Abtastzeit* T oder der *Abtastfrequenz* $\omega_p = \frac{2\pi}{T}$

Ein solches Abtastsignal wird somit durch eine Zahlenfolge beschrieben:

$f(kT) = \{f(0), f(T), f(2T), f(3T), \ldots\}$ mit $k \geq 0$

Die Folge $f(kT)$ wird häufig auch verkürzend mit $f(k)$ oder f_k bezeichnet.

Diskreter Regelkreis



Bei der Digitalisierung werden Abtastglieder und Halteglieder dem Standardregelkreis hinzugefügt.

Differenzengleichung

- Kontinuierlichen System kann mit DGL beschrieben werden
- Kontinuierliches Modell benutzt die ersten n Ableitungen von $y(t)$ und die ersten q Ableitungen von $u(t)$. Beide stehen nicht zur Verfügung.
- Näherung durch Differenzengleichung:

$$\dot{y}(t) \approx \Delta y(t) = \frac{y(t+T) - y(t)}{T}$$

- Beschreibung des Systems mit Differenzengleichung:

$$a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) =$$
$$b_q u(k+q) + b_{q-1} u(k+q-1) + \cdots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)$$

Eigenschaften

- Die Anzahl der Koeffizienten stimmt in der Regel nicht(!) mit der Anzahl der Koeffizienten der DGL überein.

- Durch Umformen erhält man eine rekursive Gleichung für $y(k)$:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{n} b_i u(k-i) - \sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i)$$

  d.h., der Ausgang wird durch die endliche Vergangenheit beschrieben

- Das System ist kausal, d.h. in die Bestimmung von $y(k)$ gehen nur Werte von u und y ein, die zum selben Zeitpunkt oder früher auftreten

- Das System ist linear, es gilt: $u = l_1 u_1 + l_2 u_2 \Rightarrow y(k) = l_1 y_1(k) + l_2 y_2(k)$

Gewichtsfolge (I)

Ähnlich wie bei diskreten Systemen die Gewichtsfunktion $g(t)$ kann die für diskrete Systeme die *Gewichtsfolge* $g(k)$ eingeführt werden.

In Analogie ist $g(k)$ die Antwort auf den *diskreten Impuls* $\delta_d(k)$ (auch *Kronecker-Delta-Folge*):

$$\delta_d(k) = \begin{cases} 1 & \Leftarrow \quad k = 0 \\ 0 & \Leftarrow \quad k \neq 0 \end{cases}$$

Für die ersten Werte von $g(k)$ gilt:

$$g(0) = b_0$$
$$g(1) = b_1 - a_1 b_0$$
$$g(2) = b_2 - a_1(b_1 - a_1 b_0) - a_2 b_0$$

etc.

Gewichtsfolge (II)

Jedes diskrete Eingangssignal u_k läßt sich als eine Folge diskreter Impulsen beschreiben, die mit dem Wert u gewichtet sind:

$$u_k = \sum_{i=0}^{\infty} u(i)\delta_d(k-i)$$

Da die Antwort eines diskreten Systems auf $\delta_d(k)$ gerade die Gewichtsfolge ist, folgt wegen der Linearität:

$$u_k = \sum_{i=0}^{\infty} u(i)g(k-i)$$

Dieser Ausdruck wird *Faltungssumme* genannt und entspricht dem Faltungsintegral bei einem kontinuierlichen System.

Mathematische Beschreibung des Abtastvorganges (I)

Modell des Abtastens: δ-Abtaster

δ-Abtaster erzeugt eine Folge von gewichteten δ-Impulsen. Diese wird durch die Pseudofunktion

$$f^\star(t) = f(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

Auf $f^\star$ kann die Laplace-Transformation angewandt werden:

$$F^\star(s) = \mathcal{L}\{f^\star(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

Dem Abtaster ist ein Halteglied nachgeschaltet, dessen Gewichtsfunktion ein Rechteckimpuls der Breite T und der Höhe 1 ist, der beschrieben werden kann durch:

$$g_H(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-T)$$

Mathematische Beschreibung des Abtastvorganges (II)

Wird auf $g_H(t)$ die Laplace-Transformation angewandt, so erhält man:

$$\mathcal{L}\{g_H(t)\} = H_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-Ts} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

$H_0(s)$ beschreibt ein *Halteglied nullter Ordnung*

Damit ist die Laplace-Transformierte der Treppenfunktion am Ausgang des Haltegliedes angebbar:

$$\bar{F}(s) = \mathcal{L}\{\bar{f}(t)\} = F^{\star}(s)H_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

z-Transformation (I)

Die Abtastung eines kontinuierlichen Signals kann als Impulsfolge

$$f^\star(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT)$$

angegeben werden. Durch Laplace-Transformation erhält man:

$$F^\star(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

Da dabei die Variable s immer nur in Verbindung mit e^{Ts} auftritt, wird anstelle von e^{Ts} die komplexe Größe z eingeführt:

$$e^{Ts} = z \text{ bzw. } s = \frac{1}{T}\ln z$$

z-Transformation (II)

Unter Benutzung von z geht $F^{\star}(s)$ über in:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} \text{ mit } F^{\star}(s) = F(e^{Ts})$$

Man bezeicht $F(z)$ als z-Transformierte der Folge $f(k)$ und die Transformation mit $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

Die z-Transformation ist ähnlich der Laplace-Transformation für kontinuierliche Systeme und hat ähnliche Eigenschaften.

Eigenschaften der z-Transformation (I)

- **Überlagerungssatz:** $\mathcal{Z}\{af_1(k) + bf_2(k)\} = aF_1(z) + bF_2(z)$
- **Ähnlichkeitssatz:** $\mathcal{Z}\{a^k f(k)\} = F\left(\frac{z}{a}\right)$
- **Dämpfungssatz:** $\mathcal{Z}\{a^{-k} f(k)\} = F(az)$
- **Verschiebungssatz:** $\mathcal{Z}\{f(k-m)\} = z^{-m}F(z)$, mit $m \geq 0$
- **Differenzensatz:** $\mathcal{Z}\{f(k+1) - f(k)\} = (z-1)F(z) - zf(0)$

Eigenschaften der z-Transformation (II)

- **Summensatz:** $\mathcal{Z}\{\sum_{i=0}^{k} f(i)\} = \frac{z}{z-1}F(z)$
- **Faltungssatz:** $\mathcal{Z}\{\sum_{i=0} n f_1(i) f_2(n-i)\} = F_1(z)F_2(z)$
- **Differentiation der Bildfunktion:** $\mathcal{Z}\{kf(k)\} = -z\frac{d}{dz}F(z)$
- **Anfangswertsatz:** $f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$
- **Endwertsatz:** $\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}((z-1)F(z))$

Korrespondenzen bei der z-Transformation

Zeitfunktion $f(t)$	$F_z(z) = \mathcal{Z}\{f(kT)\}$	Zeitfunktion $f(t)$	$F_z(z) = \mathcal{Z}\{f(kT)\}$
$\delta(t)$	1	$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{z-1}$
t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	t^2	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$a^{\frac{t}{T}}$	$\frac{z}{z-a}$
$\sin \omega_0 t$	$\frac{z \sin \omega_0 T}{z^2 - 2z\cos\omega_0 T + 1}$	$\cos \omega_0 t$	$\frac{z^2 - z\cos\omega_0 T}{z^2 - 2z\cos\omega_0 T + 1}$

Approximation diskreter Übertragungsfunktionen

Häufig sind die kontinuierlichen Übertragungsfunktionen bekannt, aber nicht die diskreten.

In diesen Fällen kann man approximieren:

- $s \approx \dfrac{z-1}{Tz}$ aus der Rechteck-Integration
- $s \approx \dfrac{2}{T}\dfrac{z-1}{z+1}$ aus $s = \frac{1}{T}\ln z$ und der Reihenentwicklung für die $\ln$-Funktion

Diskreter PID-Regler

Eine der einfachsten Möglcihkeit, Regelalgorithmen für diskrete Regelungen zu entwerfen, besteht darin, Regler für kontinuierliche Systeme zu übertragen.

Deshalb setzt man die Approximationen für s in den Regler ein. Man braucht nur die drei Summanden einzeln zu approximieren:

$$
\begin{aligned}
K_P(s) &= k_P & \rightarrow \quad & K_P(z) = k_P \\
K_I(s) &= \tfrac{1}{sT_I} & \rightarrow \quad & K_I(z) = \frac{T}{2T_I}\frac{z+1}{z-1} \\
K_D(s) &= k_D s & \rightarrow \quad & K_D(z) = \frac{k_D}{2T_I}\frac{z-1}{z}
\end{aligned}
$$

Zusammengefaßt erhält man für den PID-Regler die zeitdiskrete Approximation:

$$U(z) = \left(k_P + \frac{T}{2T_I}\frac{z+1}{z-1} + \frac{k_D}{T}\frac{z-1}{z}\right) E(z)$$

Wenn die Abtastzeit genügend klein ist (maximal $\frac{1}{10}$ der dominierenden Zeitkonstante des Systems), so können direkt die Werte des kontinuierlichen PID-Reglers verwendet werden.