

# Proseminar Grenzen der Berechenbarkeit

Michael Schulz

Institut für Informatik  
Humboldt-Universität zu Berlin

26. Mai 2006



- 1 Gödelsätze & Abstraktion von Theorem GT
  - Gödelsätze
  - Lemma D
- 2 Wahrheit nicht im System definierbar
  - Theorem T
- 3 Unentscheidbare Sätze von  $\mathcal{L}$ 
  - Widerspruchsfrei & widerspruchsvoll
  - Entscheidbar & vollständig
  - Theorem 1
  - Theorem 1<sup>o</sup> - Ein Dual zu Theorem 1

- 1 Gödelsätze & Abstraktion von Theorem GT
  - Gödelsätze
  - Lemma D
- 2 Wahrheit nicht im System definierbar
  - Theorem T
- 3 Unentscheidbare Sätze von  $\mathcal{L}$ 
  - Widerspruchsfrei & widerspruchsvoll
  - Entscheidbar & vollständig
  - Theorem 1
  - Theorem 1<sup>o</sup> - Ein Dual zu Theorem 1

- 1 Gödelsätze & Abstraktion von Theorem GT
  - Gödelsätze
  - Lemma D
- 2 Wahrheit nicht im System definierbar
  - Theorem T
- 3 Unentscheidbare Sätze von  $\mathcal{L}$ 
  - Widerspruchsfrei & widerspruchsvoll
  - Entscheidbar & vollständig
  - Theorem 1
  - Theorem  $1^\circ$  - Ein Dual zu Theorem 1

## Definition

Ein Satz  $E_n$  ist **Gödelsatz** für eine Menge  $A$  von Zahlen, wenn entweder  $E_n$  wahr ist und seine Gödelnummer in  $A$  liegt, oder  $E_n$  falsch ist und seine Gödelnummer nicht in  $A$  liegt. Für einen Gödelsatz  $E_n \in \mathcal{S}$  für  $A$  gilt:

$$E_n \in \mathcal{T} \iff n \in A$$

## Bemerkung

- *Man kann sich Gödelsatz  $G$  für Menge  $A$  als Satz vorstellen der behauptet seine Gödelnummer liegt in  $A$*
- *$G$  wahr, wenn seine Gödelnummer in  $A$  liegt*
- *$G$  falsch, wenn seine Gödelnummer nicht in  $A$*

## Definition

Ein Satz  $E_n$  ist **Gödelsatz** für eine Menge  $A$  von Zahlen, wenn entweder  $E_n$  wahr ist und seine Gödelnummer in  $A$  liegt, oder  $E_n$  falsch ist und seine Gödelnummer nicht in  $A$  liegt. Für einen Gödelsatz  $E_n \in \mathcal{S}$  für  $A$  gilt:

$$E_n \in \mathcal{T} \iff n \in A$$

## Bemerkung

- *Man kann sich Gödelsatz  $G$  für Menge  $A$  als Satz vorstellen der behauptet seine Gödelnummer liegt in  $A$*
- *$G$  wahr, wenn seine Gödelnummer in  $A$  liegt*
- *$G$  falsch, wenn seine Gödelnummer nicht in  $A$*

## Definition

Ein Satz  $E_n$  ist **Gödelsatz** für eine Menge  $A$  von Zahlen, wenn entweder  $E_n$  wahr ist und seine Gödelnummer in  $A$  liegt, oder  $E_n$  falsch ist und seine Gödelnummer nicht in  $A$  liegt. Für einen Gödelsatz  $E_n \in \mathcal{S}$  für  $A$  gilt:

$$E_n \in \mathcal{T} \iff n \in A$$

## Bemerkung

- *Man kann sich Gödelsatz  $G$  für Menge  $A$  als Satz vorstellen der behauptet seine Gödelnummer liegt in  $A$*
- *$G$  wahr, wenn seine Gödelnummer in  $A$  liegt*
- *$G$  falsch, wenn seine Gödelnummer nicht in  $A$*

## Definition

Ein Satz  $E_n$  ist **Gödelsatz** für eine Menge  $A$  von Zahlen, wenn entweder  $E_n$  wahr ist und seine Gödelnummer in  $A$  liegt, oder  $E_n$  falsch ist und seine Gödelnummer nicht in  $A$  liegt. Für einen Gödelsatz  $E_n \in \mathcal{S}$  für  $A$  gilt:

$$E_n \in \mathcal{T} \iff n \in A$$

## Bemerkung

- *Man kann sich Gödelsatz  $G$  für Menge  $A$  als Satz vorstellen der behauptet seine Gödelnummer liegt in  $A$*
- *$G$  wahr, wenn seine Gödelnummer in  $A$  liegt*
- *$G$  falsch, wenn seine Gödelnummer nicht in  $A$*

## Lemma (D – Ein Diagonalisierungslemma)

- 1 Für jede Menge  $A$  gilt, dass wenn  $A^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für  $A$ .
- 2 Wenn  $\mathcal{L}$  die Bedingung  $G_1$  erfüllt, dann existiert für jede in  $\mathcal{L}$  ausdrückbare Menge  $A$  ein Gödelsatz für  $A$ .

## Bemerkung

- schnellerer Beweis für Theorem GT:  $\tilde{P}^*$  ausdrückbar  $\xRightarrow{\text{Lemma D}}$  existiert Gödelsatz für  $\tilde{P}$
- D.h. es existiert Satz, der wahr und nicht beweisbar ist

## Lemma (D – Ein Diagonalisierungslemma)

- 1 Für jede Menge  $A$  gilt, dass wenn  $A^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für  $A$ .
- 2 Wenn  $\mathcal{L}$  die Bedingung  $G_1$  erfüllt, dann existiert für jede in  $\mathcal{L}$  ausdrückbare Menge  $A$  ein Gödelsatz für  $A$ .

## Bemerkung

- schnellerer Beweis für Theorem GT:  $\tilde{P}^*$  ausdrückbar  $\xrightarrow{\text{Lemma D}}$  existiert Gödelsatz für  $\tilde{P}$
- D.h. es existiert Satz, der wahr und nicht beweisbar ist

## Lemma (D – Ein Diagonalisierungslemma)

- 1 Für jede Menge  $A$  gilt, dass wenn  $A^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für  $A$ .
- 2 Wenn  $\mathcal{L}$  die Bedingung  $G_1$  erfüllt, dann existiert für jede in  $\mathcal{L}$  ausdrückbare Menge  $A$  ein Gödelsatz für  $A$ .

## Bemerkung

- schnellerer Beweis für Theorem GT:  $\tilde{P}^*$  ausdrückbar  $\xrightarrow{\text{Lemma D}}$  existiert Gödelsatz für  $\tilde{P}$
- D.h. es existiert Satz, der wahr und nicht beweisbar ist

zu zeigen:

- 1 Für jede Menge  $A$  gilt, dass wenn  $A^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für  $A$ .

Beweis.

- 1 Sei  $A^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar, dann existiert  $H \in \mathcal{H}$ , welches  $A^*$  ausdrückt. Weiterhin sei  $h := g(H)$  die Gödelnummer von  $H$ .

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} : \quad & H(n) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow n \in A^* \\ & H(h) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow h \in A^* \quad //g \text{ bijektiv} \\ & \Leftrightarrow d(h) \in A \quad //\text{Def. von } A^* \\ & \Leftrightarrow g(H(h)) \in A \quad //\text{Def. von } d\end{aligned}$$

Also ist  $H(h)$  Gödelsatz von  $A$ , da  $H(h)$  genau dann wahr, wenn seine Gödelnummer Element von  $A$  ist.



zu zeigen:

- 1 Für jede Menge  $A$  gilt, dass wenn  $A^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für  $A$ .

Beweis.

- 1 Sei  $A^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar, dann existiert  $H \in \mathcal{H}$ , welches  $A^*$  ausdrückt. Weiterhin sei  $h := g(H)$  die Gödelnummer von  $H$ .

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}: \quad & H(n) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow n \in A^* \\ & H(h) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow h \in A^* \quad //g \text{ bijektiv} \\ & \Leftrightarrow d(h) \in A \quad //\text{Def. von } A^* \\ & \Leftrightarrow g(H(h)) \in A \quad //\text{Def. von } d\end{aligned}$$

Also ist  $H(h)$  Gödelsatz von  $A$ , da  $H(h)$  genau dann wahr, wenn seine Gödelnummer Element von  $A$  ist.



zu zeigen:

- ② Wenn für jede in  $\mathcal{L}$  ausdrückbare Menge  $A$  gilt, dass  $A^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für  $A$ .

gerade gezeigt:

Für jede Menge  $A$  gilt, dass wenn  $A^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für  $A$ .

Beweis.

- ② Folgt direkt aus 1.



zu zeigen:

- ② Wenn für jede in  $\mathcal{L}$  ausdrückbare Menge  $A$  gilt, dass  $A^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für  $A$ .

gerade gezeigt:

Für jede Menge  $A$  gilt, dass wenn  $A^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für  $A$ .

Beweis.

- ② Folgt direkt aus 1.



zu zeigen:

- ② Wenn für jede in  $\mathcal{L}$  ausdrückbare Menge  $A$  gilt, dass  $A^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für  $A$ .

gerade gezeigt:

Für jede Menge  $A$  gilt, dass wenn  $A^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für  $A$ .

Beweis.

- ② Folgt direkt aus 1.



# Analogon zum Lügnerparadoxon von Epimenides

- Land in dem jeder Einwohner stets die Wahrheit sagt oder lügt
- Einige Einwohner sind Athener, andere Kreter.
- Athener sprechen stets Wahrheit.
- Kreter lügen immer.

## Frage?

Welche Aussage muss ein Einwohner treffen um glaubhaft zu machen, dass er stets die Wahrheit sagt aber kein Athener ist?

## Achtung:

Beispiel trennt nicht Syntax von Semantik!

# Analogon zum Lügnerparadoxon von Epimenides

- Land in dem jeder Einwohner stets die Wahrheit sagt oder lügt
- Einige Einwohner sind Athener, andere Kreter.
- Athener sprechen stets Wahrheit.
- Kreter lügen immer.

## Frage?

Welche Aussage muss ein Einwohner treffen um glaubhaft zu machen, dass er stets die Wahrheit sagt aber kein Athener ist?

## Achtung:

Beispiel trennt nicht Syntax von Semantik!

# Analogon zum Lügnerparadoxon von Epimenides

- Land in dem jeder Einwohner stets die Wahrheit sagt oder lügt
- Einige Einwohner sind Athener, andere Kreter.
- Athener sprechen stets Wahrheit.
- Kreter lügen immer.

## Frage?

Welche Aussage muss ein Einwohner treffen um glaubhaft zu machen, dass er stets die Wahrheit sagt aber kein Athener ist?

## Achtung:

Beispiel trennt nicht Syntax von Semantik!

# Analogon zum Lügnerparadoxon von Epimenides

- Land in dem jeder Einwohner stets die Wahrheit sagt oder lügt
- Einige Einwohner sind Athener, andere Kreter.
- Athener sprechen stets Wahrheit.
- Kreter lügen immer.

## Frage?

Welche Aussage muss ein Einwohner treffen um glaubhaft zu machen, dass er stets die Wahrheit sagt aber kein Athener ist?

## Achtung:

Beispiel trennt nicht Syntax von Semantik!

# Analogon zum Lügnerparadoxon von Epimenides

- Land in dem jeder Einwohner stets die Wahrheit sagt oder lügt
- Einige Einwohner sind Athener, andere Kreter.
- Athener sprechen stets Wahrheit.
- Kreter lügen immer.

## Frage?

Welche Aussage muss ein Einwohner treffen um glaubhaft zu machen, dass er stets die Wahrheit sagt aber kein Athener ist?

## Achtung:

Beispiel trennt nicht Syntax von Semantik!

# Analogon zum Lügnerparadoxon von Epimenides

- Land in dem jeder Einwohner stets die Wahrheit sagt oder lügt
- Einige Einwohner sind Athener, andere Kreter.
- Athener sprechen stets Wahrheit.
- Kreter lügen immer.

## Frage?

Welche Aussage muss ein Einwohner treffen um glaubhaft zu machen, dass er stets die Wahrheit sagt aber kein Athener ist?

## Antwort.

„Ich bin kein Athener.“

## Achtung:

Beispiel trennt nicht Syntax von Semantik!

# Analogon zum Lügnerparadoxon von Epimenides

- Land in dem jeder Einwohner stets die Wahrheit sagt oder lügt
- Einige Einwohner sind Athener, andere Kreter.
- Athener sprechen stets Wahrheit.
- Kreter lügen immer.

## Frage?

Welche Aussage muss ein Einwohner treffen um glaubhaft zu machen, dass er stets die Wahrheit sagt aber kein Athener ist?

## Antwort.

„Ich bin kein Athener.“

## Achtung:

Beispiel trennt nicht Syntax von Semantik!

## Definition

$\mathcal{T}$  sei die Menge aller Gödelnummern der wahren Sätze in  $\mathcal{L}$ .

$$\mathcal{T} := \{g(X) \mid X \in \mathcal{T}\}$$

## Theorem (T – Nach Tarski)

- 1 Die Menge  $\tilde{\mathcal{T}}^*$  ist nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .
- 2 Wenn die Bedingung  $G_1$  hält, dann ist  $\tilde{\mathcal{T}}$  nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .
- 3 Wenn sowohl  $G_1$  als auch  $G_2$  halten, dann ist die Menge  $\mathcal{T}$  nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .

## Definition

$\mathcal{T}$  sei die Menge aller Gödelnummern der wahren Sätze in  $\mathcal{L}$ .

$$\mathcal{T} := \{g(X) \mid X \in \mathcal{T}\}$$

## Theorem (T – Nach Tarski)

- 1 Die Menge  $\tilde{\mathcal{T}}^*$  ist nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .
- 2 Wenn die Bedingung  $G_1$  hält, dann ist  $\tilde{\mathcal{T}}$  nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .
- 3 Wenn sowohl  $G_1$  als auch  $G_2$  halten, dann ist die Menge  $\mathcal{T}$  nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .

## Definition

$T$  sei die Menge aller Gödelnummern der wahren Sätze in  $\mathcal{L}$ .

$$T := \{g(X) \mid X \in \mathcal{T}\}$$

## Theorem (T – Nach Tarski)

- 1 Die Menge  $\tilde{T}^*$  ist nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .
- 2 Wenn die Bedingung  $G_1$  hält, dann ist  $\tilde{T}$  nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .
- 3 Wenn sowohl  $G_1$  als auch  $G_2$  halten, dann ist die Menge  $T$  nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .

## Definition

$T$  sei die Menge aller Gödelnummern der wahren Sätze in  $\mathcal{L}$ .

$$T := \{g(X) \mid X \in \mathcal{T}\}$$

## Theorem (T – Nach Tarski)

- 1 Die Menge  $\tilde{T}^*$  ist nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .
- 2 Wenn die Bedingung  $G_1$  hält, dann ist  $\tilde{T}$  nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .
- 3 Wenn sowohl  $G_1$  als auch  $G_2$  halten, dann ist die Menge  $T$  nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .

zu zeigen:

- 1 Die Menge  $\tilde{T}^*$  ist nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .

Beweis.

Es gibt keinen Gödelsatz für die Menge  $\tilde{T}$ , weil solch ein Satz einzig wahr wäre, wenn seine Gödelnummer nicht die Gödelnummer eines wahren Satzes ist.  $\zeta$

- $\tilde{T}^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar  $\stackrel{D.1}{\implies}$  existiert Gödelsatz für  $\tilde{T}$   $\zeta$   
 $\implies \tilde{T}^*$  nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .



zu zeigen:

- 1 Die Menge  $\tilde{T}^*$  ist nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .

Beweis.

Es gibt keinen Gödelsatz für die Menge  $\tilde{T}$ , weil solch ein Satz einzig wahr wäre, wenn seine Gödelnummer nicht die Gödelnummer eines wahren Satzes ist.  $\zeta$

- 1  $\tilde{T}^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar  $\stackrel{\text{D. 1.}}{\implies}$  existiert Gödelsatz für  $\tilde{T}$   $\zeta$   
 $\implies \tilde{T}^*$  nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .



zu zeigen:

- 1 Die Menge  $\tilde{T}^*$  ist nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .

Beweis.

Es gibt keinen Gödelsatz für die Menge  $\tilde{T}$ , weil solch ein Satz einzig wahr wäre, wenn seine Gödelnummer nicht die Gödelnummer eines wahren Satzes ist.  $\zeta$

- 1  $\tilde{T}^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar  $\stackrel{\text{D. 1.}}{\implies}$  existiert Gödelsatz für  $\tilde{T}$   $\zeta$   
 $\implies \tilde{T}^*$  nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .



zu zeigen:

- 2 Wenn für jede in  $\mathcal{L}$  ausdrückbare Menge  $A$  gilt, dass  $A^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar ist, dann ist  $\tilde{T}$  nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .

Beweis.

- 2 Sei  $\tilde{T}$  ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .  
 $\xrightarrow{G_1} \tilde{T}^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar. Widerspruch zu 1.



zu zeigen:

- ② Wenn für jede in  $\mathcal{L}$  ausdrückbare Menge  $A$  gilt, dass  $A^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar ist, dann ist  $\tilde{T}$  nicht ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .

Beweis.

- ② Sei  $\tilde{T}$  ausdrückbar in  $\mathcal{L}$ .  
 $\xrightarrow{G_1} \tilde{T}^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar. Widerspruch zu 1.



zu zeigen:

- 3 Wenn für jede in  $\mathcal{L}$  ausdrückbare Menge  $A$  gilt, dass sowohl  $A^*$  als auch  $\tilde{A}$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar sind, dann ist die Menge  $T$  nicht in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar.

Beweis.

- 3 Sei  $T$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar.  
 $\xRightarrow{G_2} \tilde{T}$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar. Widerspruch zu 2.



Bemerkung

*Anders formuliert: In Systemen „ausreichender Stärke“ ist Wahrheit im System selbst nicht definierbar. „Ausreichende Stärke“ meint hier  $G_1$  und  $G_2$ .*

zu zeigen:

- ③ Wenn für jede in  $\mathcal{L}$  ausdrückbare Menge  $A$  gilt, dass sowohl  $A^*$  als auch  $\tilde{A}$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar sind, dann ist die Menge  $T$  nicht in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar.

Beweis.

- ③ Sei  $T$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar.  
 $\xRightarrow{G_2} \tilde{T}$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar. Widerspruch zu 2.



Bemerkung

*Anders formuliert: In Systemen „ausreichender Stärke“ ist Wahrheit im System selbst nicht definierbar. „Ausreichende Stärke“ meint hier  $G_1$  und  $G_2$ .*

zu zeigen:

- ③ Wenn für jede in  $\mathcal{L}$  ausdrückbare Menge  $A$  gilt, dass sowohl  $A^*$  als auch  $\tilde{A}$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar sind, dann ist die Menge  $T$  nicht in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar.

Beweis.

- ③ Sei  $T$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar.  
 $\xrightarrow{G_2} \tilde{T}$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar. Widerspruch zu 2.



Bemerkung

*Anders formuliert: In Systemen „ausreichender Stärke“ ist Wahrheit im System selbst nicht definierbar. „Ausreichende Stärke“ meint hier  $G_1$  und  $G_2$ .*

## Definition

$\mathcal{L}$  wird **widerspruchsfrei** genannt, wenn kein Satz gleichzeitig in  $\mathcal{L}$  beweis- und widerlegbar ist, sonst **widerspruchsvoll**.

$$\mathcal{L} \text{ widerspruchsfrei} \iff \mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$$

## Motivation:

- Wir verlangen Korrektheit des Systems, Gödels Beweise kommen nur mit Widerspruchsfreiheit aus.
- $\mathcal{L}$  korrekt  $\Rightarrow \mathcal{L}$  widerspruchsfrei, denn

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \text{ und } \mathcal{T} \cap \mathcal{R} = \emptyset \implies \mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$$

## Definition

$\mathcal{L}$  wird **widerspruchsfrei** genannt, wenn kein Satz gleichzeitig in  $\mathcal{L}$  beweis- und widerlegbar ist, sonst **widerspruchsvoll**.

$$\mathcal{L} \text{ widerspruchsfrei} \iff \mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$$

## Motivation:

- Wir verlangen Korrektheit des Systems, Gödels Beweise kommen nur mit Widerspruchsfreiheit aus.
- $\mathcal{L}$  korrekt  $\Rightarrow \mathcal{L}$  widerspruchsfrei, denn

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \text{ und } \mathcal{T} \cap \mathcal{R} = \emptyset \implies \mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$$

## Definition

$\mathcal{L}$  wird **widerspruchsfrei** genannt, wenn kein Satz gleichzeitig in  $\mathcal{L}$  beweis- und widerlegbar ist, sonst **widerspruchsvoll**.

$$\mathcal{L} \text{ widerspruchsfrei} \iff \mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$$

## Motivation:

- Wir verlangen Korrektheit des Systems, Gödels Beweise kommen nur mit Widerspruchsfreiheit aus.
- $\mathcal{L}$  korrekt  $\Rightarrow$   $\mathcal{L}$  widerspruchsfrei, denn

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \text{ und } \mathcal{T} \cap \mathcal{R} = \emptyset \implies \mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$$

## Definition

Ein Satz  $X$  wird **entscheidbar** in  $\mathcal{L}$  genannt, wenn er in  $\mathcal{L}$  entweder beweis- oder widerlegbar ist, sonst **unentscheidbar** in  $\mathcal{L}$ .

## Definition

Ein System  $\mathcal{L}$  wird **vollständig** genannt, wenn jeder Satz in  $\mathcal{L}$  entscheidbar ist, und **unvollständig**, wenn ein Satz existiert, der in  $\mathcal{L}$  unentscheidbar ist.

## Definition

Ein Satz  $X$  wird **entscheidbar** in  $\mathcal{L}$  genannt, wenn er in  $\mathcal{L}$  entweder beweis- oder widerlegbar ist, sonst **unentscheidbar** in  $\mathcal{L}$ .

## Definition

Ein System  $\mathcal{L}$  wird **vollständig** genannt, wenn jeder Satz in  $\mathcal{L}$  entscheidbar ist, und **unvollständig**, wenn ein Satz existiert, der in  $\mathcal{L}$  unentscheidbar ist.

## Theorem (Theorem 1)

*Wenn  $\mathcal{L}$  korrekt und die Menge  $\tilde{P}^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar ist, dann ist  $\mathcal{L}$  unvollständig.*

### Beweis.

Nach Theorem GT existiert ein wahrer Satz  $S \in \mathcal{T}$ , der nicht beweisbar ist ( $S \notin \mathcal{P}$ ).

Korrektheit:  $\mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \emptyset \Rightarrow S$  nicht widerlegbar

$\Rightarrow S$  nicht beweisbar & nicht widerlegbar

$\Rightarrow S$  unentscheidbar

$\Rightarrow \mathcal{L}$  unvollständig □

## Theorem (Theorem 1)

*Wenn  $\mathcal{L}$  korrekt und die Menge  $\tilde{P}^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar ist, dann ist  $\mathcal{L}$  unvollständig.*

## Beweis.

Nach Theorem GT existiert ein wahrer Satz  $S \in \mathcal{T}$ , der nicht beweisbar ist ( $S \notin \mathcal{P}$ ).

Korrektheit:  $\mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \emptyset \Rightarrow S$  nicht widerlegbar

$\Rightarrow S$  nicht beweisbar & nicht widerlegbar

$\Rightarrow S$  unentscheidbar

$\Rightarrow \mathcal{L}$  unvollständig



## Definition

$R$  sei die Menge aller Gödelnummern der widerlegbaren Sätze in  $\mathcal{L}$ .

$$R := \{g(X) \mid X \in \mathcal{R}\}$$

## Theorem (Theorem 1° – Ein Dual von Theorem 1)

*Wenn  $\mathcal{L}$  korrekt und die Menge  $R^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar ist, dann ist  $\mathcal{L}$  unvollständig. Genauer, wenn  $\mathcal{L}$  korrekt ist und  $K$  ein Prädikat ist, welches  $R^*$  ausdrückt, dann ist seine Diagonalisierung  $K(k)$  unentscheidbar in  $\mathcal{L}$  ( $k$  ist Gödelnummer von  $K$ ).*

## Definition

$R$  sei die Menge aller Gödelnummern der widerlegbaren Sätze in  $\mathcal{L}$ .

$$R := \{g(X) \mid X \in \mathcal{R}\}$$

## Theorem (Theorem 1° – Ein Dual von Theorem 1)

*Wenn  $\mathcal{L}$  korrekt und die Menge  $R^*$  in  $\mathcal{L}$  ausdrückbar ist, dann ist  $\mathcal{L}$  unvollständig. Genauer, wenn  $\mathcal{L}$  korrekt ist und  $K$  ein Prädikat ist, welches  $R^*$  ausdrückt, dann ist seine Diagonalisierung  $K(k)$  unentscheidbar in  $\mathcal{L}$  ( $k$  ist Gödelnummer von  $K$ ).*

## Beweis.

Sei  $K \in \mathcal{H}$  ein Prädikat, welches  $R^*$  ausdrückt und  $k$  seine Gödelnummer, dann folgt nach 1. von Lemma D, dass  $K(k)$  ein Gödelsatz für  $R$  ist.

$$\begin{aligned}K(k) \in \mathcal{T} &\iff g(K(k)) \in R \\ &\iff K(k) \in \mathcal{R}\end{aligned}$$

$\Rightarrow K(k)$  entw. wahr & widerlegbar oder falsch & nicht widerlegbar

Korrektheit:  $\mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \emptyset \Rightarrow K(k)$  falsch & nicht widerlegbar

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \quad \Rightarrow \quad K(k) \text{ nicht beweisbar}$$

$\Rightarrow K(k)$  weder beweis- noch widerlegbar

$\Rightarrow \mathcal{L}$  unvollständig



## Zu $G_1, G_2, G_3$ duale Bedingungen

- $G_1$ : Für jede ausdrückbare Menge  $A$  ist die Menge  $A^*$  ausdrückbar.
- $G_3'$ : Die Menge  $R$  ist ausdrückbar.

Wenn  $\mathcal{L}$  korrekt ist und  $G_1$  und  $G_3'$  erfüllt, dann ist  $\mathcal{L}$  unvollständig.

Beweis.

$$\begin{aligned} G_3' &\stackrel{G_1}{\implies} R^* \text{ ausdrückbar} \\ &\stackrel{1^\circ}{\implies} \mathcal{L} \text{ unvollständig} \end{aligned}$$



Bemerkung

*Komplementäre Bedingung von  $G_2$  nicht benötigt.*

## Zu $G_1, G_2, G_3$ duale Bedingungen

- $G_1$ : Für jede ausdrückbare Menge  $A$  ist die Menge  $A^*$  ausdrückbar.
- $G_3'$ : Die Menge  $R$  ist ausdrückbar.

Wenn  $\mathcal{L}$  korrekt ist und  $G_1$  und  $G_3'$  erfüllt, dann ist  $\mathcal{L}$  unvollständig.

Beweis.

$$\begin{aligned} G_3' &\stackrel{G_1}{\implies} R^* \text{ ausdrückbar} \\ &\stackrel{1^\circ}{\implies} \mathcal{L} \text{ unvollständig} \end{aligned}$$

□

Bemerkung

*Komplementäre Bedingung von  $G_2$  nicht benötigt.*

## Zu $G_1, G_2, G_3$ duale Bedingungen

- $G_1$ : Für jede ausdrückbare Menge  $A$  ist die Menge  $A^*$  ausdrückbar.
- $G_3'$ : Die Menge  $R$  ist ausdrückbar.

Wenn  $\mathcal{L}$  korrekt ist und  $G_1$  und  $G_3'$  erfüllt, dann ist  $\mathcal{L}$  unvollständig.

Beweis.

$$\begin{aligned} G_3' &\stackrel{G_1}{\implies} R^* \text{ ausdrückbar} \\ &\stackrel{1^\circ}{\implies} \mathcal{L} \text{ unvollständig} \end{aligned}$$



Bemerkung

*Komplementäre Bedingung von  $G_2$  nicht benötigt.*

## Zu $G_1, G_2, G_3$ duale Bedingungen

- $G_1$ : Für jede ausdrückbare Menge  $A$  ist die Menge  $A^*$  ausdrückbar.
- $G_3'$ : Die Menge  $R$  ist ausdrückbar.

Wenn  $\mathcal{L}$  korrekt ist und  $G_1$  und  $G_3'$  erfüllt, dann ist  $\mathcal{L}$  unvollständig.

Beweis.

$$\begin{aligned} G_3' &\stackrel{G_1}{\implies} R^* \text{ ausdrückbar} \\ &\stackrel{1^\circ}{\implies} \mathcal{L} \text{ unvollständig} \end{aligned}$$



Bemerkung

*Komplementäre Bedingung von  $G_2$  nicht benötigt.*

## Bemerkung

- $H(h)$  sagt: „Ich bin nicht beweisbar in  $\mathcal{L}$ .“
- $K(k)$  sagt: „Ich bin widerlegbar in  $\mathcal{L}$ .“
- Im Analogon der Athener und Kreter:
  - $H(h)$  Einwohner, welcher behauptet kein Athener zu sein.
  - $K(k)$  Einwohner, welcher behauptet Kreter zu sein.

## Bemerkung

- $H(h)$  sagt: „Ich bin nicht beweisbar in  $\mathcal{L}$ .“
- $K(k)$  sagt: „Ich bin widerlegbar in  $\mathcal{L}$ .“
- *Im Analogon der Athener und Kreter:*
  - $H(h)$  Einwohner, welcher behauptet kein Athener zu sein.
  - $K(k)$  Einwohner, welcher behauptet Kreter zu sein.

## Bemerkung

- $H(h)$  sagt: „Ich bin nicht beweisbar in  $\mathcal{L}$ .“
- $K(k)$  sagt: „Ich bin widerlegbar in  $\mathcal{L}$ .“
- Im Analogon der Athener und Kreter:
  - $H(h)$  Einwohner, welcher behauptet kein Athener zu sein.
  - $K(k)$  Einwohner, welcher behauptet Kreter zu sein.

*Wahrsager  $\Rightarrow$  Kreter  $\nmid$*

*Lügner  $\Rightarrow$  kein Kreter*

*$\Rightarrow$  Einwohner ist weder Athener noch Kreter.*

## Bemerkung

- $H(h)$  sagt: „Ich bin nicht beweisbar in  $\mathcal{L}$ .“
- $K(k)$  sagt: „Ich bin widerlegbar in  $\mathcal{L}$ .“
- Im Analogon der Athener und Kreter:
  - $H(h)$  Einwohner, welcher behauptet kein Athener zu sein.
  - $K(k)$  Einwohner, welcher behauptet Kreter zu sein.

Wahrsager  $\Rightarrow$  Kreter  $\nleftrightarrow$

Lügner  $\Rightarrow$  kein Kreter

$\Rightarrow$  Einwohner ist weder Athener noch Kreter.

## Bemerkung

- $H(h)$  sagt: „Ich bin nicht beweisbar in  $\mathcal{L}$ .“
- $K(k)$  sagt: „Ich bin widerlegbar in  $\mathcal{L}$ .“
- Im Analogon der Athener und Kreter:
  - $H(h)$  Einwohner, welcher behauptet kein Athener zu sein.
  - $K(k)$  Einwohner, welcher behauptet Kreter zu sein.

Wahrsager  $\Rightarrow$  Kreter  $\nleftrightarrow$

Lügner  $\Rightarrow$  kein Kreter

$\Rightarrow$  Einwohner ist weder Athener noch Kreter.

## Bemerkung

- $H(h)$  sagt: „Ich bin nicht beweisbar in  $\mathcal{L}$ .“
- $K(k)$  sagt: „Ich bin widerlegbar in  $\mathcal{L}$ .“
- Im Analogon der Athener und Kreter:
  - $H(h)$  Einwohner, welcher behauptet kein Athener zu sein.
  - $K(k)$  Einwohner, welcher behauptet Kreter zu sein.

Wahrsager  $\Rightarrow$  Kreter  $\nleftrightarrow$

Lügner  $\Rightarrow$  kein Kreter

$\Rightarrow$  Einwohner ist weder Athener noch Kreter.

## Bemerkung

- $H(h)$  sagt: „Ich bin nicht beweisbar in  $\mathcal{L}$ .“
- $K(k)$  sagt: „Ich bin widerlegbar in  $\mathcal{L}$ .“
- Im Analogon der Athener und Kreter:
  - $H(h)$  Einwohner, welcher behauptet kein Athener zu sein.
  - $K(k)$  Einwohner, welcher behauptet Kreter zu sein.

Wahrsager  $\Rightarrow$  Kreter  $\nleftrightarrow$

Lügner  $\Rightarrow$  kein Kreter

$\Rightarrow$  Einwohner ist weder Athener noch Kreter.