

Jede Sprache \mathcal{L} auf die Gödels Argumente anwendbar sind, enthält mindestens die folgenden Dinge:

- abzählbare Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{L}$ der Ausdrücke in \mathcal{L}
- Menge $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$ der Sätze in \mathcal{L}
- Menge $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$ der beweisbaren Sätze in \mathcal{L}
- Menge $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ der widerlegbaren Sätze in \mathcal{L}
- Menge $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}$ der Prädikate in \mathcal{L} . Jedes Prädikat H kann man sich als Name einer Menge von natürlichen Zahlen vorstellen.
- Eine Funktion Φ , welche jedem Ausdruck E und jeder natürlichen Zahl n einen Ausdruck $E(n)$ zuweist. Der Satz $H(n)$ drückt aus, dass die Nummer n zu der von H genannten Menge gehört.
- Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ der wahren Sätze in \mathcal{L}

Definition. Ein Prädikat $H \in \mathcal{H}$ ist für eine Nummer n **wahr** oder n **erfüllt** H , wenn $H(n)$ ein wahrer Satz ist (d.h. $H(n) \in \mathcal{T}$).

Bei der Menge, die von H **ausgedrückt** wird, meinen wir die Menge aller n , die H erfüllen. Daher gilt für jede Menge A von natürlichen Zahlen, H drückt A genau dann aus, wenn für alle n gilt:

$$H(n) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow n \in A$$

Definition. Eine Menge A ist in \mathcal{L} **ausdrück-** oder **benennbar**, wenn A von einigen Prädikaten von \mathcal{L} ausgedrückt wird.

Definition. Das System \mathcal{L} wird **korrekt** genannt, wenn jeder beweisbare Satz wahr ist und jeder widerlegbare Satz falsch (nicht wahr) ist.

$$\mathcal{L} \text{ korrekt} \iff \mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \text{ und } \mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \emptyset$$

Definition. Sei g eine bijektive Funktion, welche jedem Ausdruck E eine natürliche Nummer $g(E)$, die **Gödelnummer** von E , zuordnet. Es ist sinnvoll anzunehmen, dass jede Nummer eine Gödelnummer eines Ausdruckes ist. Sei also E_n der Ausdruck, dessen Gödelnummer n ist, also $g(E_n) = n$.

Bei der **Diagonalisierung** von E_n meinen wir den Ausdruck $E_n(n)$. Wenn E_n ein Prädikat ist, dann ist seine Diagonalisierung natürlich ein Satz. Dieser Satz ist genau dann wahr, wenn E_n von der eigenen Gödelnummer n erfüllt wird.

Für jedes n lassen wir $d(n)$ die Gödelnummer von $E_n(n)$ sein. Wir nennen es die Diagonalfunktion eines Systems.

$$d(n) := g(E_n(n))$$

Definition. Für jede Zahlenmenge A meinen wir mit A^* die Menge aller (natürlichen) Zahlen n mit $d(n) \in A$.

$$n \in A^* \iff d(n) \in A$$

$$A^* := d^{-1}(A)$$

Definition. P sei die Menge aller Gödelnummern der beweisbaren Sätze in \mathcal{L} . Analog werden T und R definiert.

$$P := \{g(X) \mid X \in \mathcal{P}\} \quad T := \{g(X) \mid X \in \mathcal{T}\} \quad R := \{g(X) \mid X \in \mathcal{R}\}$$

Definition. Für jede Menge A sei \tilde{A} das Komplement bzgl. der natürlichen Zahlen.

$$\tilde{A} := \mathbb{N} \setminus A$$

Für den Beweis der Hypothese, dass \tilde{P}^* in \mathcal{L} ausdrückbar ist, werden nacheinander folgende Bedingungen geprüft.

G_1 : Für jede in \mathcal{L} ausdrückbare Menge A ist die Menge A^* ausdrückbar in \mathcal{L} .

G_2 : Für jede in \mathcal{L} ausdrückbare Menge A ist die Menge \tilde{A} ausdrückbar in \mathcal{L} .

G_3 : Die Menge P ist in \mathcal{L} ausdrückbar.

G_1 und G_2 implizieren natürlich, dass wenn die Menge A in \mathcal{L} ausdrückbar ist, so ist auch \tilde{A}^* in \mathcal{L} ausdrückbar. Daher ist \tilde{P}^* in \mathcal{L} ausdrückbar, wenn P in \mathcal{L} ausdrückbar ist.

Definition. Ein Satz E_n ist **Gödelsatz** für eine Menge A von Zahlen, wenn entweder E_n wahr ist und seine Gödelnummer in A liegt, oder E_n falsch ist und seine Gödelnummer nicht in A liegt. Für einen Gödelsatz $E_n \in \mathcal{S}$ für A gilt:

$$E_n \in \mathcal{T} \iff n \in A$$

Definition. \mathcal{L} wird **widerspruchsfrei** genannt, wenn kein Satz gleichzeitig in \mathcal{L} beweis- und widerlegbar ist (D.h. die Mengen \mathcal{P} und \mathcal{R} sind disjunkt), sonst **widerspruchsvoll**.

Definition. Ein Satz X wird **entscheidbar** in \mathcal{L} genannt, wenn er in \mathcal{L} entweder beweis- oder widerlegbar ist, sonst **unentscheidbar** in \mathcal{L} .

Definition. Ein System \mathcal{L} wird **vollständig** genannt, wenn jeder Satz in \mathcal{L} entscheidbar ist und **unvollständig**, wenn ein Satz existiert, der in \mathcal{L} unentscheidbar ist.