Gödelsätze – Die Essenz aus Theorem GT

Definition

Ein Satz E_n ist Gödelsatz für eine Menge A von Zahlen, wenn entweder E_n wahr ist und seine Gödelnummer in A liegt, oder E_n falsch ist und seine Gödelnummer nicht in A liegt. Für einen Gödelsatz $E_n \in \mathcal{S}$ für A gilt:

$$E_n \in \mathcal{T} \iff n \in A$$

Bemerkung

- *Man kann sich Gödelsatz G für Menge A als Satz vorstellen der behauptet seine Gödelnummer liegt in A*
- *G wahr, wenn seine Gödelnummer in A liegt*
- *G falsch, wenn seine Gödelnummer nicht in A*

Lemma D

Lemma (D – Ein Diagonalisierungslemma)

1. *Für jede Menge A gilt, dass wenn A^* in $\mathcal{L}$ ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für A.*
2. *Wenn $\mathcal{L}$ die Bedingung G_1 erfüllt, dann existiert für jede in $\mathcal{L}$ ausdrückbare Menge A ein Gödelsatz für A.*

Bemerkung

- *schnellerer Beweis für Theorem GT: $\widetilde{P}^*$ ausdrückbar $\overset{\text{Lemma D}}{\Longrightarrow}$ existiert Gödelsatz für $\widetilde{P}$*
- *D.h. es existiert Satz, der wahr und nicht beweisbar ist*

Lemma D

zu zeigen:

1. Für jede Menge A gilt, dass wenn A^* in $\mathcal{L}$ ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für A.

Beweis.

1. Sei A^* in $\mathcal{L}$ ausdrückbar, dann existiert $H \in \mathcal{H}$, welches A^* ausdrückt. Weiterhin sei $h := g(H)$ die Gödelnummer von H.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}: \qquad & H(n) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow n \in A^* \\ & H(h) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow h \in A^* && //\text{g bijektiv} \\ & \qquad\qquad \Leftrightarrow d(h) \in A && //\text{Def. von } A^* \\ & \qquad\qquad \Leftrightarrow g(H(h)) \in A && //\text{Def. von } d \end{aligned}$$

Also ist $H(h)$ Gödelsatz von A, da $H(h)$ genau dann wahr, wenn seine Gödelnummer Element von A ist.

□

Lemma D

zu zeigen:

2. Wenn für jede in $\mathcal{L}$ ausdrückbare Menge A gilt, dass A^* in $\mathcal{L}$ ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für A.

gerade gezeigt:

Für jede Menge A gilt, dass wenn A^* in $\mathcal{L}$ ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für A.

Beweis.

2. Folgt direkt aus 1.

□

Analogon zum Lügnerparadoxon von Epimenides

- Land in dem jeder Einwohner stets die Wahrheit sagt oder lügt
- Einige Einwohner sind Athener, andere Kreter.
- Athener sprechen stets Wahrheit.
- Kreter lügen immer.

Frage?

Welche Aussage muss ein Einwohner treffen um glaubhaft zu machen, dass er stets die Wahrheit sagt aber kein Athener ist?

Antwort.

„Ich bin kein Athener.“

Achtung:

Beispiel trennt nicht Syntax von Semantik!

Theorem T

Definition

T sei die Menge aller Gödelnummern der wahren Sätze in $\mathcal{L}$.

$$T := \{g(X) \mid X \in \mathcal{T}\}$$

Theorem (T – Nach Tarski)

1. *Die Menge $\widetilde{T}^*$ ist nicht ausdrückbar in $\mathcal{L}$.*
2. *Wenn die Bedingung G_1 hält, dann ist $\widetilde{T}$ nicht ausdrückbar in $\mathcal{L}$.*
3. *Wenn sowohl G_1 als auch G_2 halten, dann ist die Menge T nicht ausdrückbar in $\mathcal{L}$.*

Theorem T

zu zeigen:

1. Die Menge $\widetilde{T}^*$ ist nicht ausdrückbar in $\mathcal{L}$.

Beweis.
Es gibt keinen Gödelsatz für die Menge $\widetilde{T}$, weil solch ein Satz einzig wahr wäre, wenn seine Gödelnummer nicht die Gödelnummer eines wahren Satzes ist. ↯

1. $\widetilde{T}^*$ in $\mathcal{L}$ ausdrückbar $\stackrel{\text{D 1.}}{\Longrightarrow}$ existiert Gödelsatz für $\widetilde{T}$ ↯
   $\Rightarrow$ $\widetilde{T}^*$ nicht ausdrückbar in $\mathcal{L}$.

□

Theorem T

zu zeigen:

2. Wenn für jede in $\mathcal{L}$ ausdrückbare Menge A gilt, dass A^* in $\mathcal{L}$ ausdrückbar ist, dann ist $\widetilde{T}$ nicht ausdrückbar in $\mathcal{L}$.

Beweis.

2. Sei $\widetilde{T}$ ausdrückbar in $\mathcal{L}$.
   $\stackrel{G_1}{\Longrightarrow}$ $\widetilde{T}^*$ in $\mathcal{L}$ ausdrückbar. Widerspruch zu 1.

□

Theorem T

zu zeigen:

3. Wenn für jede in $\mathcal{L}$ ausdrückbare Menge A gilt, dass sowohl A^* als auch $\widetilde{A}$ in $\mathcal{L}$ ausdrückbar sind, dann ist die Menge T nicht in $\mathcal{L}$ ausdrückbar.

Beweis.

3. Sei T in $\mathcal{L}$ ausdrückbar.
   $\overset{G_2}{\Longrightarrow}$ $\widetilde{T}$ in $\mathcal{L}$ ausdrückbar. Widerspruch zu 2.

$\square$

Bemerkung

Anders formuliert: In Systemen „ausreichender Stärke“ ist Wahrheit im System selbst nicht definierbar. „Ausreichende Stärke“ meint hier G_1 und G_2.

Widerspruchsfrei und widerspruchsvoll

Definition

$\mathcal{L}$ wird widerspruchsfrei genannt, wenn kein Satz gleichzeitig in $\mathcal{L}$ beweis- und widerlegbar ist, sonst widerspruchsvoll.

$$\mathcal{L} \text{ widerspruchsfrei} \Longleftrightarrow \mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$$

Motivation:

- Wir verlangen Korrektheit des Systems, Gödels Beweise kommen nur mit Widerspruchsfreiheit aus.
- $\mathcal{L}$ korrekt $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ widerspruchsfrei, denn

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \text{ und } \mathcal{T} \cap \mathcal{R} = \emptyset \Longrightarrow \mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$$

Entscheidbar und vollständig

Definition
Ein Satz X wird entscheidbar in $\mathcal{L}$ genannt, wenn er in $\mathcal{L}$ entweder beweis- oder widerlegbar ist, sonst unentscheidbar in $\mathcal{L}$.

Definition
Ein System $\mathcal{L}$ wird vollständig genannt, wenn jeder Satz in $\mathcal{L}$ entscheidbar ist, und unvollständig, wenn ein Satz existiert, der in $\mathcal{L}$ unentscheidbar ist.

Theorem 1

Theorem (Theorem 1)
Wenn $\mathcal{L}$ korrekt und die Menge $\widetilde{P}^*$ in $\mathcal{L}$ ausdrückbar ist, dann ist $\mathcal{L}$ unvollständig.

Beweis.
Nach Theorem GT existiert ein wahrer Satz $S \in \mathcal{T}$, der nicht beweisbar ist ($S \notin \mathcal{P}$).

Korrektheit: $\mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \emptyset \;\Rightarrow\; S$ nicht widerlegbar
$\Rightarrow S$ nicht beweisbar & nicht widerlegbar
$\Rightarrow S$ unentscheidbar
$\Rightarrow \mathcal{L}$ unvollständig $\square$

Theorem 1°

Definition
R sei die Menge aller Gödelnummern der widerlegbaren Sätze in $\mathcal{L}$.

$$R := \{g(X) \mid X \in \mathcal{R}\}$$

Theorem (Theorem 1° – Ein Dual von Theorem 1)
Wenn $\mathcal{L}$ korrekt und die Menge R^* in $\mathcal{L}$ ausdrückbar ist, dann ist $\mathcal{L}$ unvollständig. Genauer, wenn $\mathcal{L}$ korrekt ist und K ein Prädikat ist, welches R^* ausdrückt, dann ist seine Diagonalisierung $K(k)$ unentscheidbar in $\mathcal{L}$ (k ist Gödelnummer von K).

Theorem 1°

Beweis.
Sei $K \in \mathcal{H}$ ein Prädikat, welches R^* ausdrückt und k seine Gödelnummer, dann folgt nach 1. von Lemma D, dass $K(k)$ ein Gödelsatz für R ist.

$$\begin{aligned} K(k) \in \mathcal{T} &\iff g(K(k)) \in R \\ &\iff K(k) \in \mathcal{R} \end{aligned}$$

$\Rightarrow K(k)$ entw. wahr & widerlegbar oder falsch & nicht widerlegbar

Korrektheit: $\mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \emptyset \Rightarrow$ $K(k)$ falsch & nicht widerlegbar
$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow$ $K(k)$ nicht beweisbar

$\Rightarrow K(k)$ weder beweis- noch widerlegbar
$\Rightarrow \mathcal{L}$ unvollständig $\square$

Zu G_1, G_2, G_3 duale Bedingungen

G_1: Für jede ausdrückbare Menge A ist die Menge A^* ausdrückbar.

$G_3{}'$: Die Menge R ist ausdrückbar.

Wenn $\mathcal{L}$ korrekt ist und G_1 und $G_3{}'$ erfüllt, dann ist $\mathcal{L}$ unvollständig.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
&G_3{}' \overset{G_1}{\Longrightarrow} R^* \text{ ausdrückbar} \\
&\overset{1^\circ}{\Longrightarrow} \mathcal{L} \text{ unvollständig}
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung

Komplementäre Bedingung von G_2 nicht benötigt.

Theorem 1° in unserem Analogon

Bemerkung

- *$H(h)$ sagt: „Ich bin nicht beweisbar in $\mathcal{L}$.“*
- *$K(k)$ sagt: „Ich bin widerlegbar in $\mathcal{L}$.“*
- *Im Analogon der Athener und Kreter:*
  - *$H(h)$ Einwohner, welcher behauptet kein Athener zu sein.*
  - *$K(k)$ Einwohner, welcher behauptet Kreter zu sein.*

Wahrsager ⇒ Kreter ↯
Lügner ⇒ kein Kreter
⇒ Einwohner ist weder Athener noch Kreter.