

Gödelsätze – Die Essenz aus Theorem GT

Definition

Ein Satz E_n ist **Gödelsatz** für eine Menge A von Zahlen, wenn entweder E_n wahr ist und seine Gödelnummer in A liegt, oder E_n falsch ist und seine Gödelnummer nicht in A liegt. Für einen Gödelsatz $E_n \in \mathcal{S}$ für A gilt:

$$E_n \in \mathcal{T} \iff n \in A$$

Bemerkung

- ▶ *Man kann sich Gödelsatz G für Menge A als Satz vorstellen der behauptet seine Gödelnummer liegt in A*
- ▶ *G wahr, wenn seine Gödelnummer in A liegt*
- ▶ *G falsch, wenn seine Gödelnummer nicht in A*

Lemma D

Lemma (D – Ein Diagonalisierungslemma)

1. Für jede Menge A gilt, dass wenn A^* in \mathcal{L} ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für A .
2. Wenn \mathcal{L} die Bedingung G_1 erfüllt, dann existiert für jede in \mathcal{L} ausdrückbare Menge A ein Gödelsatz für A .

Bemerkung

- ▶ schnellerer Beweis für Theorem GT: \tilde{P}^* ausdrückbar $\xRightarrow{\text{Lemma D}}$ existiert Gödelsatz für \tilde{P}
- ▶ D.h. es existiert Satz, der wahr und nicht beweisbar ist

Lemma D

zu zeigen:

1. Für jede Menge A gilt, dass wenn A^* in \mathcal{L} ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für A .

Beweis.

1. Sei A^* in \mathcal{L} ausdrückbar, dann existiert $H \in \mathcal{H}$, welches A^* ausdrückt. Weiterhin sei $h := g(H)$ die Gödelnummer von H .

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : \quad & H(n) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow n \in A^* \\ & H(h) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow h \in A^* && //g \text{ bijektiv} \\ & \Leftrightarrow d(h) \in A && //\text{Def. von } A^* \\ & \Leftrightarrow g(H(h)) \in A && //\text{Def. von } d \end{aligned}$$

Also ist $H(h)$ Gödelsatz von A , da $H(h)$ genau dann wahr, wenn seine Gödelnummer Element von A ist.



Lemma D

zu zeigen:

2. Wenn für jede in \mathcal{L} ausdrückbare Menge A gilt, dass A^* in \mathcal{L} ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für A .

gerade gezeigt:

Für jede Menge A gilt, dass wenn A^* in \mathcal{L} ausdrückbar ist, dann existiert ein Gödelsatz für A .

Beweis.

2. Folgt direkt aus 1.



Analogon zum Lügnerparadoxon von Epimenides

- ▶ Land in dem jeder Einwohner stets die Wahrheit sagt oder lügt
- ▶ Einige Einwohner sind Athener, andere Kreter.
- ▶ Athener sprechen stets Wahrheit.
- ▶ Kreter lügen immer.

Frage?

Welche Aussage muss ein Einwohner treffen um glaubhaft zu machen, dass er stets die Wahrheit sagt aber kein Athener ist?

Antwort.

„Ich bin kein Athener.“

Achtung:

Beispiel trennt nicht Syntax von Semantik!

Theorem T

Definition

T sei die Menge aller Gödelnummern der wahren Sätze in \mathcal{L} .

$$T := \{g(X) \mid X \in \mathcal{T}\}$$

Theorem (T – Nach Tarski)

1. Die Menge \tilde{T}^* ist nicht ausdrückbar in \mathcal{L} .
2. Wenn die Bedingung G_1 hält, dann ist \tilde{T} nicht ausdrückbar in \mathcal{L} .
3. Wenn sowohl G_1 als auch G_2 halten, dann ist die Menge T nicht ausdrückbar in \mathcal{L} .

Theorem T

zu zeigen:

1. Die Menge \tilde{T}^* ist nicht ausdrückbar in \mathcal{L} .

Beweis.

Es gibt keinen Gödelsatz für die Menge \tilde{T} , weil solch ein Satz einzig wahr wäre, wenn seine Gödelnummer nicht die Gödelnummer eines wahren Satzes ist. \Leftarrow

1. \tilde{T}^* in \mathcal{L} ausdrückbar $\xrightarrow{D 1.}$ existiert Gödelsatz für \tilde{T} \Leftarrow
 $\Rightarrow \tilde{T}^*$ nicht ausdrückbar in \mathcal{L} .



Theorem T

zu zeigen:

2. Wenn für jede in \mathcal{L} ausdrückbare Menge A gilt, dass A^* in \mathcal{L} ausdrückbar ist, dann ist \tilde{T} nicht ausdrückbar in \mathcal{L} .

Beweis.

2. Sei \tilde{T} ausdrückbar in \mathcal{L} .
 $\xRightarrow{G_1} \tilde{T}^*$ in \mathcal{L} ausdrückbar. Widerspruch zu 1.



Theorem T

zu zeigen:

3. Wenn für jede in \mathcal{L} ausdrückbare Menge A gilt, dass sowohl A^* als auch \tilde{A} in \mathcal{L} ausdrückbar sind, dann ist die Menge T nicht in \mathcal{L} ausdrückbar.

Beweis.

3. Sei T in \mathcal{L} ausdrückbar.
 $\xRightarrow{G_2} \tilde{T}$ in \mathcal{L} ausdrückbar. Widerspruch zu 2.



Bemerkung

Anders formuliert: In Systemen „ausreichender Stärke“ ist Wahrheit im System selbst nicht definierbar. „Ausreichende Stärke“ meint hier G_1 und G_2 .

Widerspruchsfrei und widerspruchsvoll

Definition

\mathcal{L} wird **widerspruchsfrei** genannt, wenn kein Satz gleichzeitig in \mathcal{L} beweis- und widerlegbar ist, sonst **widerspruchsvoll**.

$$\mathcal{L} \text{ widerspruchsfrei} \iff \mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$$

Motivation:

- ▶ Wir verlangen Korrektheit des Systems, Gödels Beweise kommen nur mit Widerspruchsfreiheit aus.
- ▶ \mathcal{L} korrekt \Rightarrow \mathcal{L} widerspruchsfrei, denn

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \text{ und } \mathcal{T} \cap \mathcal{R} = \emptyset \implies \mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$$

Entscheidbar und vollständig

Definition

Ein Satz X wird **entscheidbar** in \mathcal{L} genannt, wenn er in \mathcal{L} entweder beweis- oder widerlegbar ist, sonst **unentscheidbar** in \mathcal{L} .

Definition

Ein System \mathcal{L} wird **vollständig** genannt, wenn jeder Satz in \mathcal{L} entscheidbar ist, und **unvollständig**, wenn ein Satz existiert, der in \mathcal{L} unentscheidbar ist.

Theorem 1

Theorem (Theorem 1)

Wenn \mathcal{L} korrekt und die Menge \tilde{P}^ in \mathcal{L} ausdrückbar ist, dann ist \mathcal{L} unvollständig.*

Beweis.

Nach Theorem GT existiert ein wahrer Satz $S \in \mathcal{T}$, der nicht beweisbar ist ($S \notin \mathcal{P}$).

Korrektheit: $\mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \emptyset \Rightarrow S$ nicht widerlegbar

$\Rightarrow S$ nicht beweisbar & nicht widerlegbar

$\Rightarrow S$ unentscheidbar

$\Rightarrow \mathcal{L}$ unvollständig



Theorem 1°

Definition

R sei die Menge aller Gödelnummern der widerlegbaren Sätze in \mathcal{L} .

$$R := \{g(X) \mid X \in \mathcal{R}\}$$

Theorem (Theorem 1° – Ein Dual von Theorem 1)

Wenn \mathcal{L} korrekt und die Menge R^ in \mathcal{L} ausdrückbar ist, dann ist \mathcal{L} unvollständig. Genauer, wenn \mathcal{L} korrekt ist und K ein Prädikat ist, welches R^* ausdrückt, dann ist seine Diagonalisierung $K(k)$ unentscheidbar in \mathcal{L} (k ist Gödelnummer von K).*

Theorem 1°

Beweis.

Sei $K \in \mathcal{H}$ ein Prädikat, welches R^* ausdrückt und k seine Gödelnummer, dann folgt nach 1. von Lemma D, dass $K(k)$ ein Gödelsatz für R ist.

$$\begin{aligned} K(k) \in \mathcal{T} &\iff g(K(k)) \in R \\ &\iff K(k) \in \mathcal{R} \end{aligned}$$

$\Rightarrow K(k)$ entw. wahr & widerlegbar oder falsch & nicht widerlegbar

Korrektheit: $\mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \emptyset \Rightarrow K(k)$ falsch & nicht widerlegbar

$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow K(k)$ nicht beweisbar

$\Rightarrow K(k)$ weder beweis- noch widerlegbar

$\Rightarrow \mathcal{L}$ unvollständig

□

Zu G_1, G_2, G_3 duale Bedingungen

G_1 : Für jede ausdrückbare Menge A ist die Menge A^* ausdrückbar.

G_3' : Die Menge R ist ausdrückbar.

Wenn \mathcal{L} korrekt ist und G_1 und G_3' erfüllt, dann ist \mathcal{L} unvollständig.

Beweis.

$$\begin{aligned} G_3' &\xrightarrow{G_1} R^* \text{ ausdrückbar} \\ &\xrightarrow{1^\circ} \mathcal{L} \text{ unvollständig} \end{aligned}$$



Bemerkung

Komplementäre Bedingung von G_2 nicht benötigt.

Theorem 1° in unserem Analogon

Bemerkung

- ▶ $H(h)$ sagt: „Ich bin nicht beweisbar in \mathcal{L} .“
- ▶ $K(k)$ sagt: „Ich bin widerlegbar in \mathcal{L} .“
- ▶ Im Analogon der Athener und Kreter:
 - ▶ $H(h)$ Einwohner, welcher behauptet kein Athener zu sein.
 - ▶ $K(k)$ Einwohner, welcher behauptet Kreter zu sein.

Wahrsager \Rightarrow Kreter \nleftrightarrow

Lügner \Rightarrow kein Kreter

\Rightarrow Einwohner ist weder Athener noch Kreter.