Clifford-Algebren, ihre Darstellung und die Anzahl globaler Vektorfelder auf Sphären

Michael Schulz

16. Juli 2007

12.1 Definition (Algebra)**.** Sei A ein K-Vektorraum. A heißt K-Algebra, falls es zusätzlich eine Multiplikationsabbildung

$$\mu : A \times A \to A, \quad (a, a') \mapsto \mu(a, a') =: a \cdot a',$$

mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. μ ist K-bilinear
2. A zusammen mit der Vektorraumaddition und der Multiplikation μ ist ein Ring.

12.2 Definition (Clifford-Algebra)**.** Eine assoziative Algebra über den Körper K mit Einselement 1 ist die Clifford-Algebra $Cl(Q)$ von einer nicht-degenerierten quadratischen Form Q auf dem Vektorraum V, wenn es V und $K = K \cdot 1$ als Unterräume enthält, so dass

1. $v^2 = Q(v)$ für jedes $v \in V$
2. V generiert $Cl(Q)$ als Algebra über K
3. und $Cl(Q)$ wird von keinem echten Unterraum von V erzeugt wird.

12.3 Behauptung. *Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Dann haben die Clifford-Algebren $Cl_{0,n}$ über den negativ definiten Raum $\mathbb{R}^{0,n} = (\mathbb{R}^n, -\langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $Cl_{n,0}$ über den positiv definiten Raum $\mathbb{R}^{n,0}(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ folgende Basiselemente:*

$$\begin{array}{ll} 1 & \textit{Skalar} \\ e_1, e_2, \ldots, e_n & \textit{Vektor} \\ e_1e_2, e_1e_3, \ldots, e_1e_n, e_2e_3, \ldots, e_{n-1}e_n & \textit{Bivektor} \\ \vdots & \\ e_1e_2\cdots e_n & n\textit{-Vektor} \end{array}$$

und $Cl_{0,n}$ erfüllt folgende Multiplikationsregeln:

$$\begin{array}{l} e_ie_j = -e_je_i \quad \textit{für} \quad i \neq j, \\ e_ie_i = -1 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{i,j}$$

und $Cl_{n,0}$ erfüllt:

$$\begin{array}{l} e_ie_j = -e_je_i \quad \textit{für} \quad i \neq j, \\ e_ie_i = 1 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad e_ie_j + e_je_i = 2\delta_{i,j}$$

Bemerkung.

- jedes Element $x \in Cl_{0,n}$ bzw. $Cl_{n,0}$ lässt sich darstellen als $\sum_{\alpha \in \wp[n]} a_\alpha e_\alpha$ mit $a_\alpha \in \mathbb{R}$ und $e_\alpha = e_1^{p_1} \cdots e_n^{p_n}$ mit $p_i = 0$ oder 1 und damit beträgt die Dimension von $Cl_{0,n}$ und $Cl_{n,0}$ 2^n
- für e_1e_2 schreiben wir auch e_{12}
- $\mathbb{R} \subset Cl_{0,n}$ bezeichne die Menge aller Vielfachen des Eins-Elementes
- Die Clifford-Algebra hat definitionsgemäß die universelle Eigenschaft, dass jeder Vektorraum-Homomorphismus $f : V \to A$ mit A $\mathbb{R}$-Algebra für die (in A) die Gleichung $f(v)^2 = Q(v)$ erfüllt ist, zu einem Algebrenhomomorphismus $\widetilde{f} : Cl(Q) \to A$ fortgesetzt werden kann mit $\widetilde{f}(v) = f(v)$ für alle $v \in V$.

12.4 Beispiel ($Cl_{0,1}$)**.** $Cl_{0,1}$ wird von den beiden Elementen $1, e_1$ erzeugt. Mit 1 als Realteil und e_1 als Imaginärteil kann man sich leicht anhand der nachfolgenden Multiplikationstabelle davon überzeugen, dass $Cl_{0,1} \simeq \mathbb{C}$.

$\cdot$	1	e_1
1	1	e_1
e_1	e_1	-1

12.5 Beispiel ($Cl_{0,2}$)**.** $Cl_{0,2}$ wird von $1, e_1, e_2, e_1e_2$ erzeugt. Mit den Zuweisungen $1 \mapsto 1,\ i \mapsto e_1,\ j \mapsto e_2,\ k \mapsto e_1e_2$ kann man sich leicht überzeugen, dass die Rechenregeln $ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$ für die Quaternionen gelten und somit $Cl_{0,2} \simeq \mathbb{H}$.

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_1e_2
1	1	e_1	e_2	e_1e_2
e_1	e_1	-1	e_1e_2	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_1e_2$	-1	e_1
e_1e_2	e_1e_2	e_2	$-e_1$	-1

12.6 Definition (Tensorprodukt)**.** Das Tensorprodukt zweier Algebren A und B über einen Körper K ist der Vektorraum $A \otimes B := (A \times B, \otimes)$, der durch ein Produkt

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb') \qquad \text{für } a, a' \in A,\ b, b' \in B$$

zu einer Algebra wird. Im speziellen Fall endlich-dimensionaler assoziativer Algebren mit multiplikativer Eins, kann $C = A \otimes B$ durch Nachprüfen folgender Eigenschaften auf den Subalgebren A und B von C ermittelt werden:

1. $ab = ba$ für jedes $a \in A$, $b \in B$
2. C wird als Algebra von A und B generiert
3. $\dim C = (\dim A)(\dim B)$.

12.7 Satz. *Es gibt Algebren-Isomorphismen*

$$Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0} \simeq Cl_{n+2,0} \tag{1}$$
$$Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \simeq Cl_{0,n+2} \tag{2}$$

Beweis. Zu 1: Sei $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$ Erzeugendensystem von $Cl_{n+2,0}$, $e'_1, \ldots, e'_n$ seien die Generatoren von Cl_0, n und e''_1, e''_2 bezeichnen Standardgeneratoren von $Cl_{2,0}$. Sei $f : Cl_{n+2,0} \to Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0}$ mit

$$f(e_i) := \begin{cases} e'_i \otimes e''_1 e''_2, & \text{für } 1 \leq i \leq n \\ 1 \otimes e''_{i-n}, & \text{für } i = n+1, n+2 \end{cases}$$

z.z.: $f(\underbrace{e_ie_j + e_je_i}_{2\delta_{i,j}}) = f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i) = 2\delta_{i,j}$

$1 \leq i, j \leq n :$

$$\begin{aligned}(e'_i \otimes e''_1e''_2)(e'j \otimes e''_1e''_2) + (e'j \otimes e''_1e''_2)(e'_i \otimes e''_1e''_2) &= (e'_ie'_j) \otimes (e''_1e''_2e''_1e''_2) + (e'_je'_i) \otimes (e''_1e''_2e''_1e''_2) \\ &= (e'_ie'_j + e'_je'_i) \otimes (-1) \\ &= -2\delta_{i,j} \otimes (-1) \\ &= 2\delta_{i,j}\end{aligned}$$

$n+1 \leq i, j \leq n+2 :$

$$\begin{aligned}(1 \otimes e''_{i-n})(1 \otimes e''_{j-n}) + (1 \otimes e''_{j-n})(1 \otimes e''_{i-n}) &= (1 \otimes e''_{i-n}e''_{j-n}) + (1 \otimes e''_{j-n}e''_{i-n}) \\ &= (1 \otimes (e''_{i-n}e''_{j-n} + e''_{j-n}e''_{i-n}) \\ &= 1 \otimes 2\delta_{i,j} \\ &= 2\delta_{i,j}\end{aligned}$$

$1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq n+2:$

$$\begin{aligned}(e'_i \otimes e''_1 e''_2)(1 \otimes e''_{j-n}) + (1 \otimes e''_{j-n})(e'_i \otimes e''_1 e''_2) &= (e'_i \otimes e''_1 e''_2 e''_{j-n}) + (e'_i \otimes e''_{j-n} e''_1 e''_2) \\ &= e'_i \otimes (e''_1 e''_2 e''_{j-n} + e''_{j-n} e''_1 e''_2) \\ &= e'_i \otimes 0 \\ &= 0 = 2\delta_{i,j}\end{aligned}$$

Also ist f ein Algebren-Homomorphismus. Weiterhin ist f surjektiv, da f auf ein Erzeugendensystem abbildet, und injektiv da beide Räume die selbe Dimension $2^n \cdot 2^2 = 2^{n+2}$ haben. Damit ist f unser gesuchter Isomorphismus. Beweis zu 2 analog. □

12.8 Behauptung.

$$\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} R(m) \simeq \mathbb{R}(nm) \qquad \forall n, m \in \mathbb{N} \tag{3}$$

$$\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \simeq \mathbb{K}(n) \qquad \mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H} \textit{ und } \forall n \tag{4}$$

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \tag{5}$$

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{C}(2) \tag{6}$$

$$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}(4) \tag{7}$$

Dabei meint $\mathbb{K}(n)$ die reelle Matrix-Algebra der $n \times n$ Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{K}$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$Cl_{0,k}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$Cl_{k,0}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$

12.9 Satz (Periodizität von 8)**.** *Für alle $n \geq 0$ gilt:*

$$Cl_{0,n+8} \simeq Cl_{0,n}(16) \tag{8}$$

$$Cl_{n+8,0} \simeq Cl_{n,0}(16) \tag{9}$$

Beweis. Nach Satz 12.7 gilt:

$$\begin{aligned}Cl_{0,n+8} &\simeq Cl_{n+6,0} \otimes Cl_{0,2} \\ &\simeq Cl_{0,n+4} \otimes Cl_{2,0} \otimes Cl_{0,2} \\ &\simeq Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \otimes Cl_{0,2} \\ &\simeq Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0} \otimes Cl_{2,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{0,2} \\ &\simeq Cl_{0,n} \otimes \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \\ &\simeq Cl_{0,n} \otimes \mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{R}(4) \\ &\simeq Cl_{0,n} \otimes \mathbb{R}(16) \\ &\simeq Cl_{0,n}(16)\end{aligned}$$

Der Beweis für 9 läuft analog. □

12.10 Definition. Sei $\widehat{\ } : Cl_{0,n} \to Cl_{0,n},\ \sum_{i=0}^n \langle x \rangle_i \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^n \langle x \rangle_i$ mit $\langle x \rangle_0$ Skalar, $\langle x \rangle_1$ Vektor, $\langle x \rangle_2$ Bivektor ... Automorphismus $(f : V \to W,\ V = W,\ f \text{ bij.})$. Dann heißt

$$Cl^0_{0,n} := \{x \in Cl_{0,n} \mid \widehat{x} = x\} \qquad \text{Subalgebra der geraden Elemente von } Cl_{0,n}$$

$$Cl^1_{0,n} := \{x \in Cl_{0,n} \mid \widehat{x} = -x\} \qquad \text{Subalgebra der ungeraden Elemente von } Cl_{0,n}$$

12.11 Satz. *Es gibt einen Algebren-Isomorphismus*

$$Cl_{0,n} \simeq Cl^0_{0,n+1}$$

Beweis. Es sei $\psi : \mathbb{R}^n \to Cl^0_{0,n+1}$ definiert durch $\psi(v) := ve_{n+1}$.

$$\psi(v)^2 = ve_{n+1}ve_{n+1} = -ve_{n+1}e_{n+1}v = vv = v^2$$

Also induziert ψ einen Algebren-Homomorphismus $\widetilde{\psi}$ von $Cl_{0,n}$ nach $Cl^0_{0,n+1}$ (siehe Bemerkung oben). Dieser ist offensichtlich surjektiv und, da beide Algebren Dimension 2^k haben, injeketiv und somit ein Isomorphismus. □

12.12 Definition (Darstellung)**.** Unter einer Darstellung einer $\mathbb{R}$-Algebra A versteht man einen Algebren-Homomorphismus $\phi : A \to \mathrm{End}(W)$, wobei W ein reeller (endlicher) Vektorraum ist.

Sei eine solche Darstellung von $A = Cl^0_{0,k}$ gegeben und $\{e_1, ..., e_k\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{0,k}$. Wir definieren nun Elemente $\phi_i \in \mathrm{End}(W)$ durch $\phi_i := \phi(e_i e_1^{-1})$.

12.13 Lemma. *Für jeden Vektor $p \in W \setminus \{0\}$ sind die Vektoren $\phi_i(p)$ linear unabhängig.*

Beweis. Sei $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und $x = \sum_i \lambda_i e_i$, dann gilt:

$$\sum_i \lambda_i \phi_i(p) = \sum_i \lambda_i \phi(e_i e_1^{-1})(p) = (\phi \sum_i \lambda_i e_i e_1^{-1})(p) = \phi(x e_1^{-1})(p)$$

Ist $x \neq 0$, dann existiert ein Inverses $x^{-1} = \frac{x}{-\langle x,x \rangle} \in Cl^0_{0,k}$, da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit. Also ist $x e_1^{-1}$ invertierbar und damit ist auch $\phi(x e_i^{-1}) \in \mathrm{End}(W)$ invertierbar. Daraus folgt, dass $\phi(x e_1^{-1})(p) \neq 0$. D.h. Null lässt sich nicht linear aus $\phi_i(p)$ kombinieren und sind somit linear unabhängig. □

12.14 Definition (Vektorfeld)**.** Ein Vektorfeld auf der Sphäre S^{n-1} ist eine stetige Funktion $v : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, so dass für alle $x \in S^{n-1}$ $v(x)$ tangential an x, d.h. $\langle v(x), x \rangle = 0$, ist.

12.15 Definition. Eine Menge von Vektorfeldern $\{v_1, ..., v_k\}$ auf S^{n-1} ist **linear unabhängig**, wenn $\{v_1(x), \ldots, v_k(x)\}$ eine unabhängige Menge von Vektoren in $\mathbb{R}^n$ für jedes $x \in S^{n-1}$ ist.

12.16 Satz. *Es besitze $Cl^0_{0,k}$ eine Darstellung auf einem n-dimensionalen Vektorraum. Dann besitzt die Sphäre S^{n-1} mindestens $k-1$ orthonormale Vektorfelder.*

Beweis. Sei $p \in S^{n-1}$ und $(v_1(p), ..., v_k(p))$ Folge, die durch Orthonormalisierung von $(\phi_1(p), ..., \phi_k(p))$ entstanden ist. Da $\phi_1 = \phi(e_1 e_1^{-1}) = \phi(1) = \mathrm{id}$, ist $v_1(p) = p$ und $v_2(p), ..., v_k(p)$ sind orthonormale Tangentialvektoren im Punkte $p \in S^{n-1}$. Da ϕ als Homomorphismus endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Algebren stetig ist, sind die v_i stetig von $p \in S^{n-1}$ abhängig. □

12.17 Korollar. *Sei $m =: a(k)$ die kleinste positive Zahl, so dass $Cl^0_{0,k}$ eine Darstellung auf einen m-dimensionalen Vektorraum besitzt. Dann hat jede Sphäre S^{n-1} mit $n = i \cdot a(k)$, $i \in \mathbb{N}_+$ mindestens $k-1$ orthonormale Vektorfelder.*

Beweis. Sei $W^i = W \oplus \ldots \oplus W$ und $\psi : \mathrm{End}(W) \to \mathrm{End}(W^i)$ Homomorphismus. Durch Komposition von $\psi \circ \phi$ erhalten wir eine Darstellung von $Cl^0_{0,k}$ auf W^i. □

Bemerkung. Die so definierte Zahl $a(k)$ ist **nicht**, wie in [1] angegeben, die Radon-Hurwitz-Zahl.

12.18 Satz. *Mit etwas Theorie zur Darstellung von $n \times n$ Matrizen mit Einträgen aus einer Algebra und 12.9 gilt:*

$$a(k+8) = 16a(k)$$

Für kleine k sind die Werte von $a(k)$:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$a(k)$	1	2	4	4	8	8	8	8

12.19 Satz. *Sei n durch 2^{4a+b} teilbar mit $a \in \mathbb{N}$, $0 \leq b \leq 3$. Dann existieren auf der Sphäre S^{n-1} mindestens $8a + 2^b - 1$ linear unabhängige stetige Vektorfelder.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Korollar 12.17 und Satz 12.18, denn mit $k := 8a + 2^b$ gilt:

$$a(k) = a(8a + 2^b) = 16^a a(2^b) = 2^{4a} a(2^b) = 2^{4a} 2^b = 2^{4a+2b}$$

□

12.20 Definition (Radon-Hurwitz-Zahl)**.** Die **Radon-Hurwitz-Zahl** ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektorfelder auf einer Sphäre S^{n-1}.

Bemerkung. Mit den vorher geführten Überlegungen und den Ergebnissen von J. F. Adams, dass unsere untere Schranke für linear unabhängige Vektorfelder auch obere Schranke ist, ist mit $n = 2^{4a+b}$, wobei $a \in \mathbb{N},\ 0 \leq b \leq 3$, die Radon-Hurwitz-Zahl durch

$$\rho(n) := 8a + 2^b - 1$$

gegeben. Für kleine n ergibt sich somit folgende Tabelle:

n	2	4	8	16	32	64	128
a	0	0	0	1	1	1	1
b	1	2	3	0	1	2	3
$\rho(n)$	1	3	7	8	9	11	15

Literatur

[1] E. Ossa: *Topologie*, Vieweg (1992)

[2] P. Lounesto: *Clifford algebras and spinors*, Cambridge Univ. Press (2001)

[3] J. Pearson: `http://www.math.gatech.edu/~pearson/1248.pdf`