2. Einstichprobenproblem

a) $H_0: \quad \mu \leq \mu_0 \qquad H_A: \mu > \mu_0$

$b) \qquad \mu \geq \mu_0 \qquad \mu < \mu_0$

$c) \qquad \mu = \mu_0 \qquad \mu \neq \mu_0$

Teststatistik:

$$T(X_1, ..., X_n) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n}$$

1. Möglichkeit: Durchführung des Tests mit

PROC UNIVARIATE MU0=μ_0;

2. Möglichkeit: Durchführung des Tests mit

PROC TTEST H0=μ_0

`Test_t1_Banknote.sas`

μ_0	gr	p-Wert Pr$>$ $\|t\|$	
215	1	0.4258	nosign
	2	< 0.0001	sign.
214.9	1	0.0784	nosign.
	2	0.03	sign.

vorgegeben Fehler 1.Art α

(üblich ist $\alpha = 0.05$ o. $\alpha = 0.01$)

d.h. $P_{\mu_0}(|T| > t_{krit}) = \alpha$

Def.: α heißt Signifikanzniveau.

T ist eine Zufallsgröße und besitzt eine bestimmte W.-verteilung, in unserem Bsp. eine t-Verteilung, (Student's t)

genauer: $T \sim t_{n-1}$

(t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden) also: Wenn $X_i \sim$ Normal, unabhängig

(unsere Annahme) so

$$T \sim t_{n-1}$$

und

$$t_{krit} = t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$$

$(1 - \frac{\alpha}{2})$ - Quantil einer t-Verteilung mit

$n - 1$ Freiheitsgraden

Bem: Die Dichtefunktion einer t-Verteilung mit $\nu(= n-1)$ Freiheitsgraden (FG) ist gegeben durch

$$f_{t_\nu}(x) = \frac{\Gamma \cdot (\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu \cdot \pi} \cdot \Gamma(\frac{\nu}{2})} \cdot (1 + \frac{x^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

PDF('T',x,n)

`Test_t_Dichte.sas`

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

PROBT(x,n)

CDF('T',x,n)

a) $H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad H_A : \mu > \mu_0$

$\Rightarrow$ große Werte von

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n}$$

indizieren Gültigkeit von H_A.

b) $H_0 : \mu \geq \mu_0 \qquad H_A : \mu < \mu_0$

$\Rightarrow$ kleine Werte von T indizieren H_A

c) $H_0 : \mu = \mu_0 \qquad H_A : \mu \neq \mu_0$

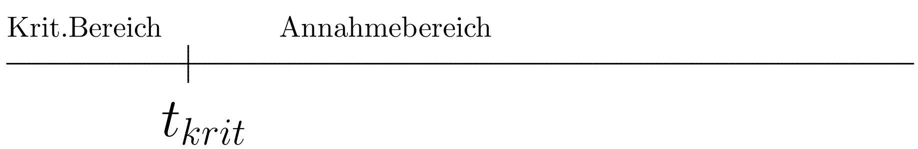
$\Rightarrow$ $|T|$ groß indiziert Gültigkeit von H_A.

a) $H_0: \quad \mu \le \mu_0 \qquad H_A: \mu > \mu_0$

große Werte von T sprechen für H_A.

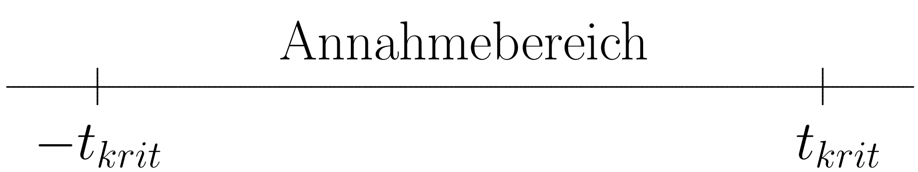
b) $H_0 \quad \mu \ge \mu_0 \qquad\qquad H_A: \quad \mu < \mu_0$

kleine Werte von T sprechen für H_A.



c) $H_0: \quad \mu = \mu_0 \qquad\qquad H_A: \quad \mu \neq \mu_0$

große Werte von $|T|$ sprechen für H_A.



zu a,b)

$$P(T > t) = \begin{cases} \frac{1}{2}P(|T| > t), \text{ falls } t > 0 \\ 1 - \frac{1}{2}P(|T| > -t), \text{ falls } t \leq 0 \end{cases}$$

a) $H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad H_a : \mu > \mu_0$

Ablehn. falls $P(T > t) < \alpha$

Die p-Werte von SAS sind zweiseitig, sie sind also (wenn $t > 0$) durch 2 zu dividieren (wenn $t \leq 0$ wird H_0 ohnehin nicht abgelehnt)

b) $H_0 : \mu \geq \mu_0 \quad H_a : \mu < \mu_0$

Ablehn. falls $P(T < t) < \alpha$

also wenn $t < 0$ so SAS-p-Wert durch 2 teilen!

$$\begin{aligned}
P(|T| > t) &= P((T > t) \vee (-T > t)) \\
&= P((T > t) \vee (T < -t)) \\
&= 2 \cdot P(T > t), \qquad t > 0 \\
P(T > t) &= P(T < -t) \\
&= 1 - P(T \geq -t) \\
&= 1 - \frac{1}{2} P(|T| > -t), \qquad t \leq 0
\end{aligned}$$

(Die Verteilung von T ist stetig und symmetrisch.)

Zusammenfass. Einstichprobenproblem

$$T = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \qquad \text{Realisierung } t$$

$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_i X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \overline{X})^2$

Zweiseitige Alternative

c) $H_0 : \mu = \mu_0 \qquad H_A : \mu \neq \mu_0$

$|t| > t_{krit} \Rightarrow H_0$ ablehnen

p-value $< \alpha \Rightarrow H_0$ ablehnen

"Pr $> |t|$" $< \alpha \Rightarrow H_0$ ablehnen

Einseitige Alternative

a) $H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad H_A : \mu > \mu_0$

$t > 0$ und $\frac{\text{p-value}}{2} < \alpha \Leftrightarrow H_0$ ablehnen

b) $H_0 : \mu \geq \mu_0 \qquad H_a : \mu < \mu_0$

$t < 0$ und $\frac{\text{p-value}}{2} < \alpha \Leftrightarrow H_0$ ablehnen

Konfidenzbereiche am Beispiel des t-Tests

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X} - \mu}{S} \sim t_{n-1}$$

wenn μ der wahre (Lokations-) Parameter ist.

$\Rightarrow$

$$P(-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X} - \mu}{s} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}) = 1-\alpha$$

auflösen nach μ:

$1 - \alpha =$

$$\begin{aligned}
&= P(-\frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \overline{X} - \mu \leq \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}) \\
&= P(-\overline{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq -\mu \leq -\overline{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}) \\
&= P(\overline{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \geq \mu \geq \overline{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}) \\
&= P(\overline{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \mu \leq \overline{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1})
\end{aligned}$$

Def.: Das Intervall

$$\left[\overline{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, \overline{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right]$$

heißt $(1-\alpha)$ <u>Konfidenzintervall</u> (Vertrauensintervall) für den (unbek.) Parameter μ

```
PROC TTEST ALPHA=Sig.niveau
PROC UNIVARIATE ALPHA=Sig.niveau CIBASIC
```

ALPHA: Konfidenzniveau (=Signifikanzniveau)

CIBASIC: Konfidenzintervalle von μ, σ^2, σ basierend auf NV

CIPCTLDF: verteilungsfreie Konfidenzinterv.

`Test_t1_Banknote`

Konfidenzintervalle für den Lageparameter

$\mu = \mathbf{E}$‘laenge’:

	echt		gefälscht	
$\alpha = 0.01$	214.87	215.07	214.73	214.92
$\alpha = 0.05$	214.89	215.05	214.75	214.89
$\alpha = 0.05$ nichtparam. KI (für Median)	214.9	215.1	214.7	214.9

```
PROC TTEST ALPHA=Wert

PROC UNIVARIATE ALPHA=Wert CIBASIC CIPCTLDF
```

Konfidenzintervalle für σ^2

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$\Rightarrow$

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Dichte einer χ^2_v-Verteilung :

`Test_Chi2_Dichte`

$$f_{\chi^2_\nu}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\frac{\nu}{2})} e^{-x/2} x^{\nu/2-1} & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2,n-1} \le (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}\right) = 1-\alpha$$

auflösen nach σ^2:

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= \\
&= P\left(\chi^2_{\alpha/2,n-1} \le (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}\right) \\
&= P\left(\frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}} \le \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \le \frac{1}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}\right) \\
&= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}\right)
\end{aligned}$$

Def.: Das Intervall

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}\right]$$

heißt $(1-\alpha)$ Konfidenzintervall (Vertrauensintervall) für den (unbek.) Parameter σ^2

```
PROC TTEST

PROC UNIVARIATE ALPHA CIBASIC CIPCTLDF
```

3. Vergleich zweier abhängiger Gruppen

(verbundene Stichproben)

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

$$\mu_1 < \mu_2$$

$$\mu_1 > \mu_2.$$

- Gewicht einer Person zu den Zeitpkt. t_1, t_2.

- Banknoten (oben- unten, links - rechts)

`Test_t2_Banknote`

- Patient nimmt Medikament 1 und 2

`Uebungsaufgabe 13`

- Kreuz- und selbstbefruchtete Pflanzen

`Test_t2_Darwin`

Folgende Möglichkeiten:

a) Transformation $Z := X_1 - X_2$ und testen

auf $\mu = 0$

```
PROC UNIVARIATE; VAR Z; RUN;    oder
PROC TTEST H0=0; VAR Z; RUN;
```

b) Mit der Prozedur TTEST:

```
PROC TTEST; PAIRED X1*X2; RUN;
```