Aufzählung rationaler Zahlen

über Cantor hinaus

Samson Wohlleber

20. November 2023

Kardinalität

Kardinalität

Die Anzahl der Elemente in einer Menge. Zwei Mengen sind gleich groß, wenn sie die gleiche Kardinalität haben.

Example

$|\{1, 2, 3\}| = 3$
$|\{1, 2, 3\}| = |\{a, b, c\}|$
$|\mathbb{N}| = \infty$
$|\mathbb{N}| \stackrel{?}{=} |\mathbb{Q}|$

Abzählbarkeit

Abzählbarkeit

Zwei Mengen haben die gleiche Kardinalität, wenn es eine Bijektion zwischen den beiden Mengen gibt. Eine Menge M ist abzählbar wenn es eine Bijektion $\mathbb{N} \to M$ gibt.

Hilbert's Hotel

$\mathbb{N} \cup \{a\}$ ist abzählbar

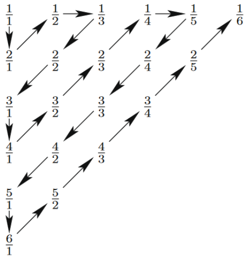
Definiere $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{a\}, f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{for } x \geq 2 \\ a & \text{for } x = 1 \end{cases}$

Diese Abblidung ist bijektiv und somit ist $\mathbb{N} \cup \{a\}$ abzählbar. $\square$

Cantor's erstes Diagonalargument

Theorem

Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.



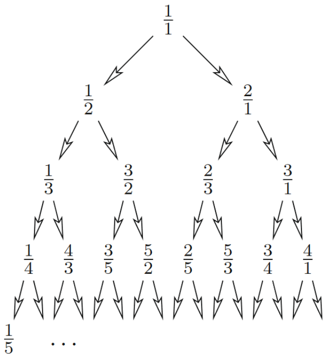
Beweis.

Reiht man die Zahlen wie in der Abbildung auf, lässt die ungekürzten Brüche weg, fügt hinter jeder Zahl x die Zahl -x ein und am Anfang die 0, erhält man die Folge $\mathbb{Q} = \{0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 4, -4, ...\}$, in der jede rationale Zahl vorkommt. Somit ist $\mathbb{Q}$ abzählbar. $\square$

Calkin-Wilf-Baum

Konstruktionsregeln

- Die Wurzel ist $\frac{1}{1}$
- jeder Knoten $\frac{r}{s}$ hat zwei Kinder. Links: $\frac{r}{r+s}$, rechts: $\frac{r+s}{s}$



Eigenschaften

Definition

Zwei Zahlen a, b sind relativ prim, wenn ihr größter gemeinsamer Teiler 1 ist. Man schreibt $a \perp b$.

Theorem

Alle Brüche sind vollständig gekürzt, d.h. wenn $\frac{r}{s}$ auftritt, dann $r \perp s$.

Beweis.

Induktionsanfang: Für $\frac{1}{1}$ gilt $r \perp s$.
Induktionsschritt: Wenn für einen Knoten $\frac{r}{s}$ $r \perp s$, dann $r \perp r + s$ und $r + s \perp s$.
Beweis: Angenommen $r \perp s$, aber r und $r + s$ haben einen Teiler $a \neq 1$.
Da $a \mid r$, muss auch $a \mid s$, da sonst $a \nmid r + s$. Somit muss $r \perp r + s$ gelten.
Das gleiche gilt für $r + s \perp s$.

□

Eigenschaften

Theorem

Jeder positive gekürzte Bruch tritt in dem Baum auf.

Beweis.

$\frac{1}{1}$ tritt auf jeden Fall auf.
Sei $\frac{r}{s}$ unter den Brüchen die nicht auftauchen, einer mit minimalem Zähler und unter jenen mit minimalem Zähler der mit minimalem Nenner.
Wenn $r > s$, dann kann $\frac{r-s}{s}$ auch nicht vorkommen, da sonst $\frac{r}{s}$ als Kind vorkommen würde. Damit hätte $\frac{r}{s}$ jedoch nicht den minimalen Zähler.
Wenn $r < s$, dann kann $\frac{r}{s-r}$ nicht vorkommen, da sonst $\frac{r}{s}$ ein Kind wäre, aber damit hätte $\frac{r}{s}$ wiederum nicht den minimalen Nenner.
Dies ist ein Widerspruch und somit müssen alle positiven gekürzten Brüche vorkommen. $\square$

Eigenschaften

Theorem

Jeder positive gekürzte Bruch tritt genau einmal auf.

Beweis.

$\frac{1}{1}$ tritt nur in der Wurzel auf. Ansonsten müsste es einen Eltern-knoten $\frac{r}{s}$ haben, aber weder $\frac{r}{r+s}$ noch $\frac{r+s}{s}$ können 1 ergeben.
Sei $\frac{r}{s}$ erneut unter den Brüchen die mehrfach vorkommen einer von denen mit minimalem Nenner und unter diesen der mit minimalem Zähler.
Wenn $r < s$, dann ist $\frac{r}{s}$ das linke Kind von verschiedenen Knoten mit $\frac{r}{r-s}$, was ein Widerspruch zur Minimalität des Nenners ist.
Wenn $r > s$, dann ist $\frac{r}{s}$ das rechte Kind von verschiedenen Knoten mit $\frac{r-s}{s}$, was ein Widerspruch zur Minimalität des Zählers ist. $\square$

Calkin-Wilf-Folge

Calkin-Wilf-Folge

Wir erhalten eine Folge aller positiven rationalen Zahlen, indem wir den Calkin-Wilf-Baum Zeilenweise von links nach rechts abgehen. Diese Folge wird die Calkin-Wilf-Folge genannt.

Eigenschaften

Theorem

Der Nenner des n-ten Bruchs der Calkin-Wilf-Folge ist der Zähler des n+1-sten.

Beweis.

Dies stimmt sicher für $n = 0$ oder wenn der n-te Bruch ein linker Sohn ist.
Ist die n-te Zahl am rechten Rand des Baums, ist ihr Nenner 1, und somit der Zähler der n+1-sten Zahl an der linken Seite des Baums, da diese Brüche alle als Zähler 1 haben.
Ist $\frac{r}{s}$ der rechte Sohn eines Knoten $\frac{r-s}{s}$ im Inneren des Baums, so ist sein Nachfolger $\frac{r'}{s'}$ der linke Sohn eines Knotens $\frac{r'}{s'-r'}$. Insbesondere gilt, dass wenn die Aussage für die Kinder gilt, sie auch für die Eltern gelten muss und andersherum.
Nun lassen sich rekursiv die Vorfahren zurückverfolgen, bis auf einen gemeinsamen Vorfahren $\frac{a}{b}$ mit $a = r\%s$ und $b = s'\%r'$ dem linken Kind $\frac{a}{s}$ und rechtem Kind $\frac{r'}{b}$ mit $s = r'$ zurückverfolgen. □

Hyperbinärdarstellung

Definition

Eine Hyperbinärdarstellung einer Zahl n ist eine Zerlegung in eine Summe von Zweierpotenzen, bei der jede Potenz höchstens zwei mal vorkommt.

Example

Hyperbinärdarstellungen von 6:

$6 = 4 + 2$

$6 = 4 + 1 + 1$

$6 = 2 + 2 + 1 + 1$

Folge $(b(n))_{n\geq 0}$

Definition

Die Folge $(b(n))_{n\geq 0}$, sei definiert durch die Zähler der Calkin-Wilf-Folge, also $(1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, ...)$. Im Gegenzug ist die n-te Zahl der Calkin-Wilf-Folge dann als $\frac{b(n)}{b(n+1)}$ definiert.

Insbesondere hat der Knoten $\frac{b(n)}{b(n+1)}$ die Kinder $\frac{b(2n+1)}{b(2n+2)}$ und $\frac{b(2n+2)}{b(2n+3)}$. Somit folgt $b(2n+1) = b(n)$ und $b(2n+2) = b(n) + b(n+1)$.

Mit $b(0) = 1$ ist die Folge $(b(n))_{n\geq 0}$ damit vollständig bestimmt.

Hyperbinärität und Calkin-Wilf

Theorem

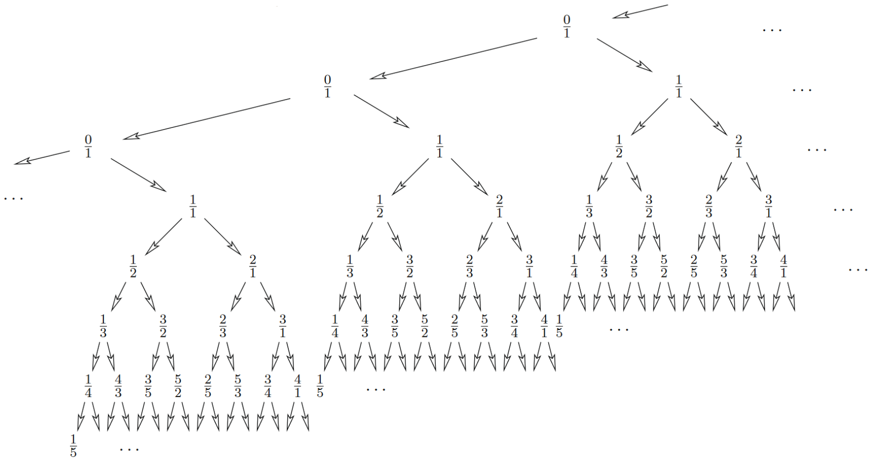
Der Anzahl der Hyperbinärdarstellungen $h(n)$ einer Zahl n ist gleich $b(n)$.

Beweis.

Induktionsanfang: $b(0) = 1 = h(0)$
Induktionsschritt: Gelte die Aussage für alle Werte $\leq 2n$.
Da in einer Darstellung von $2n + 1$ die 1 vorkommen muss, kann man 1 entfernen, alle Summanden durch 2 Teilen und erhält eine Darstellung für n. Das gleiche geht auch umgekehrt und somit
$h(2n + 1) = h(n) = b(n) = b(2n + 1)$.
Bei $2n + 2$ sind entweder 0 oder 2 1er vor. Sind es zwei, kann man beide entfernen, durch 2 teilen und erhält eine Darstellung von n. Sind es keine, kann man durch 2 teilen und erhält eine Darstellung von $n + 1$. Dies geht wieder umgekehrt und somit
$h(2n + 2) = h(n) + h(n + 1) = b(n) + b(n + 1) = b(2n + 2)$. □

Modifizierter Calkin-Wilf-Baum

Bei diesem Baum ohne Wurzel sind alle Zeilen gleich. Sie beginnen mit $\frac{0}{1}$ und geben dann die Calkin-Wilf-Aufzählung der rationalen Zahlen.



Nachfolger berechnen

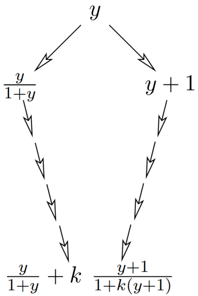
Eigenschaften von Enkeln

Gegeben ein Knoten $x \in \mathbb{Q}$, sind

- rechtes Kind$= x + 1$, rechter Enkel$= x + 2$, k-faches rechtes Kind$= x + k$
- linkes Kind$= \frac{x}{1+x}$, linker Enkel$= \frac{x}{1+2x}$, k-faches linkes Kind$= \frac{x}{1+kx}$

Nachfolger berechnen

Gegeben ein Knoten $x \in \mathbb{Q}$ ist sein Nachfolger $f(x)$. Sie haben einen gemeinsamen Vorfahren y, von dessen linken Kind x das k-fache rechte Kind und von dessen rechtem Kind $f(x)$ das k-fache linke Kind ist.
Somit ist $x = \frac{y}{1+y} + k$
Sei $\lfloor x \rfloor = k$ der ganzzahlige und $\{x\} = \frac{y}{1+y}$ der gebrochene Teil von x.
$f(x) = \frac{y+1}{1+k(y+1)} = \frac{1}{\frac{1}{y+1}+k} = \frac{1}{k+1-\frac{y}{y+1}} = \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1 - \{x\}}$

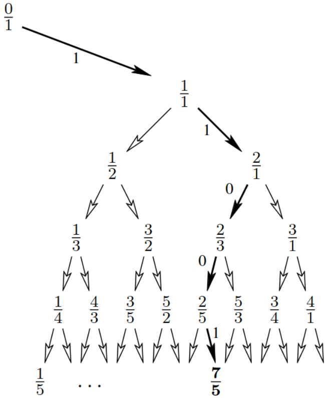


Calkin-Wilf-Folge

Die Funktion $x \to f(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1 - \{x\}}$
erzeugt die Calkin-Wilf-Folge in der jede positive rationale Zahl genau einmal auftritt.

Bestimmung der n-ten rationalen Zahl

Die n-te Zahl der Calkin-Wilf-Folge kann anhand ihrer Binärdarstellung im modifizierten Calkin-Wilf-Baum bestimmt werden. Angefangen mit der Wurzel $\frac{0}{1}$ bedeutet eine 0 "linkes Kind", eine 1 "rechtes Kind".



Quellen

Martin Aigner.
Das BUCH der Beweise / Martin Aigner, Günter M. Ziegler ; mit Zeichnungen von Karl H. Hoffmann.
Berlin, 5. auflage edition, 2018.
ISBN 9783662577677.

Neil Calkin and Herbert S. Wilf.
Recounting the rationals.
The American mathematical monthly, 107(4):360–363, 2000.
ISSN 0002-9890.