# Museumswächtersatz

Shakhriyor Nizomov

2. Dezember 2022

# Galerie

Wir besitzen eine Galerie mit vielen bekannten und berühmten Beweisen, aber der berüchtigte Mathematiker Klaus Klautbeweise ist anscheinend zu Besuch in unserer Stadt.

Figure: Unsere Galerie

# Grundriss

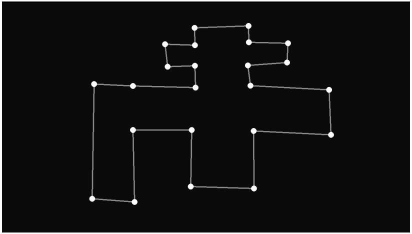


Figure: Grundrissbeispiel

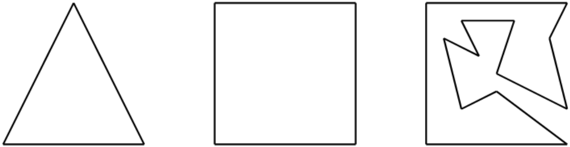
Wir brauchen Museumswächter um unsere Beweise zu schützen - wie viele brauchen wir und wo sollten wir sie platzieren? Dieses Problem wurde von Viktor Klee 1973 gestellt.

# Intuition

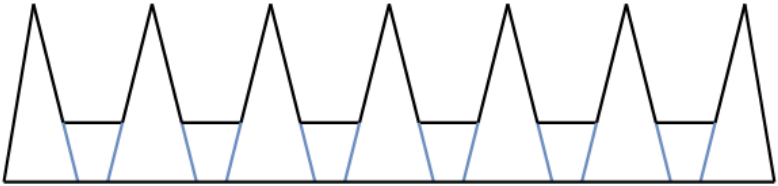
Einschränkungen:

- Wächter sind stationär
- können sich drehen (haben Rundumsicht)

"Einfache" Beispiele:



# Worst-Case



In diesem Beispiel brauchen wir einen Wächter für jede "Spitze".

## Der Museumswächtersatz

*"Für jedes Museum mit n Wänden reichen $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter aus."*

Weitere Einschränkung: Der Satz bezieht sich auf einfache Polygone (d.h. keine Löcher, die Kanten kreuzen sich nicht und es ist eben).

# Beweisschritte

Zuerst wurde der Satz von Vašek Chvátal bewiesen (durch Induktion - kompliziert), später hat Steve Fisk einen anschaulicheren Beweis konstruiert.

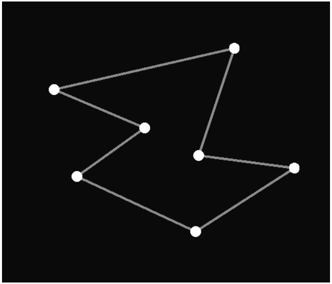
Im Grunde zwei Schritte:

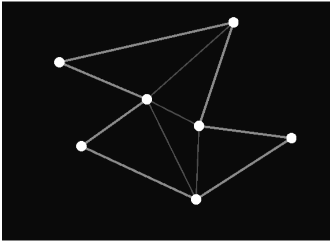
- Triangulierung
- 3-Färben

Figure: Vašek Chvátal

# Beispiel

Triangulierung: Zerlegung in Dreiecke





# Triangulierung existiert

**Theorem:** *Einfache Polygone lassen sich immer triangulieren.*

**Beweis:** *Induktion*

# Beweis durch Induktion

$n = 3$: Dreieck - lässt sich offensichtlich triangulieren

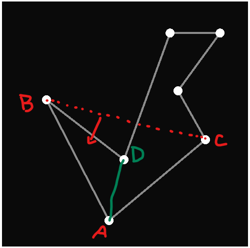
$n \geq 4$: Polygon - d.h. wir müssen eine Diagonale finden, welche innerhalb des Polygons liegt, um das Polygon in zwei kleinere zu teilen

# Beweis durch Induktion

Um eine solche Diagonale zu finden:

- suchen konvexe Ecke
- prüfen ob Diagonale, die entstehen würde wenn wir Nachbarn der Ecke verbinden vollständig im Polygon liegt
  - ja: Diagonale gefunden
  - nein: schieben Diagonale zu der Ecke, bis wir eine Ecke treffen $\rightarrow$ bilden Diagonale zwischen dieser Ecke und unserer konvexen Ecke

# Beweis durch Induktion



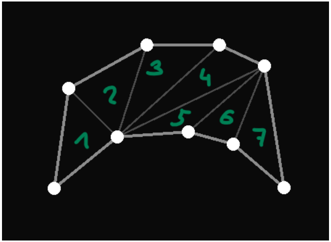

$A$ ist eine konvexe Ecke, die Diagonale $\overline{BC}$ liegt aber nicht innerhalb des Polygons. Wir schieben also die Diagonale zu der Ecke hin und treffen die Ecke $D$. Somit teilt die Diagonale $\overline{AD}$ unser Polygon in zwei kleinere Polygone.

# Algorithmus

Algorithmus um Triangulation zu konstruieren ist ähnlich zum Beweis: Wir suchen eine konvexe Ecke und prüfen ob die Diagonale, die entsteht wenn wir die Nachbarn verbinden, vollständig im Polygon liegt $\rightarrow$ *Ear-Clipping-Algorithmus*

Statt Ecke "$D$" zu suchen, prüfen wir einfach alle konvexen Ecken und "schneiden" schrittweise diese "Ohren" ab.

# Algorithmus




Wenn man den Algorithmus durchläuft, würde man beispielsweise die Dreiecke in dieser Reihenfolge erhalten.

# 3-Färben

**Theorem:** *Die Triangulation eines einfaches Polygons lässt sich 3-färben*

**Beweis:** *Induktion*, äquivalent zum Beweis der Triangulation

# Beweis durch Induktion

$n = 3$: Dreieck, ist also 3-färbbar

$n \geq 4$: Ähnlich zur Triangulierung - wir färben die zwei Ecken, die durch eine Diagonale verbunden sind, ...

# Algorithmus

Color($p_0$) $\leftarrow$ 1
Color($p_1$) $\leftarrow$ 2
**for** $i = 1$ to $n - 1$ **do**
    **if** odd(deg($p_i$)) **then**
        Color($p_{i+1}$) $\leftarrow$ Color($p_{i-1}$)
    **else**
        Color($p_{i+1}$) $\leftarrow$ 6 - Color($p_{i-1}$) - Color($p_i$)
    **end if**
**end for**

# Gefärbter Graph

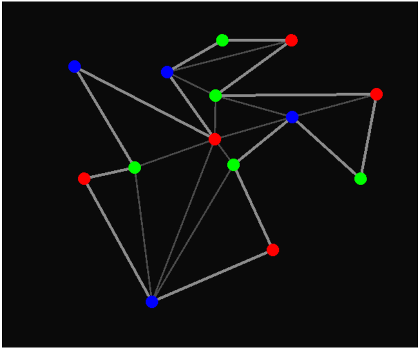


Figure: 3-gefärbter Graph

# Und jetzt?

Trianguliert und 3-gefärbter Graph, wie geht es weiter?

Da die Summe der Vorkommen $r + g + b = n$ ist, muss eine Farbe weniger als $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$-mal vorkommen - denn würden alle Farben mehr als $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$-mal vorkommen, wäre die Summe größer als $n$. Wir wählen die Farbe, die am seltensten auftritt und platzieren dort unsere Wächter.

Somit haben wir gezeigt, dass $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter genügend und manchmal nötig sind.

Wir haben uns hier auf einfache Polygone und statische Wächter eingeschränkt. Es gibt viele Variationen:

- Wächter dürfen sich bewegen
- Löcher
- orthogonale Polygone (Innenwinkel an Ecken sind $90^\circ$ oder $270^\circ$)

# Quellen


- Das BUCH der Beweise (4. Auflage)
- https://en.wikipedia.org/wiki/Art_gallery_problem
- "Three-Coloring The Vertices of A Triangulated Simple Polygon" A. A. Kooshesh und B. M. E. Moret