# Irrationalität von e und $\pi$

Sten-Maarten Zacharias

1.12.2022

# Gliederung:

- Irrationalität von e

- Grundlagen Analysis
- Irrationalität von $\pi$

# Irrationalität von $e$

# Beweis: e ist irrational

- Nehme an:
  $\exists a, b \in \mathbb{Z}, b > 0 : \frac{a}{b} = e$

- Dann würde gelten:
  $\forall n \geq 0$: n!*b*e $=$ n!*a

# Beweis: e ist irrational

- Nehme an:
  $\exists a, b \in \mathbb{Z}, b > 0 : \frac{a}{b} = e$

- Dann würde gelten:
  $\forall n \geq 0$: n!*b*e $=$ n!*a

- **Betrachte beide Seiten der Gleichung:**

- **Rechte Seite der Gleichung: n!*a**

  n! $\in \mathbb{N}$ und a $\in \mathbb{Z}$

  n!*a $\in \mathbb{Z}$

# Linke Seite der Gleichung: n!*b*e

- **Schreibe e als:**
  $e = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + .... + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + ....\right)$

# Linke Seite der Gleichung: n!*b*e

- **Schreibe e als:**
  $e = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + .... + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + ....\right)$

- n!*e*b =

  n!*b* $\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + .... + \frac{1}{n!}\right) +$

  n!*b* $\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + ....\right)$

# Linke Seite der Gleichung: n!*b*e

- **Schreibe e als:**
  $e = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + .... + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + ....\right)$

- n!*e*b $=$

  n!*b* $\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + .... + \frac{1}{n!}\right) +$

  n!*b*$\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + ....\right)$

**Es ergeben sich 2 Teile:**

# Linke Seite der Gleichung: n!*b*e

- **Schreibe e als:**
  $e = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + .... + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + ....\right)$

- n!*e*b =

  n!*b* $\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + .... + \frac{1}{n!}\right) +$

  n!*b*$\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + ....\right)$

**Es ergeben sich 2 Teile:**

**1. Teil:**

n!*b* $\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + .... + \frac{1}{n!}\right) =$b* $\left(n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + .... + \frac{n!}{n!}\right) \in \mathbb{Z}$

da b $\in \mathbb{Z}$ und $\frac{n!}{m!} \in \mathbb{N} \quad \forall b : 0 < m \leq n$

# 2. Teil der Gleichung: n!*b*e

- n!*b*$(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + ....)$
  $= b*(\frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+3)!} + ....)$

  $= b*(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + ....)$

# 2. Teil der Gleichung: n!*b*e

- n!*b*$\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+....\right)$
  $= b*\left(\frac{n!}{(n+1)!}+\frac{n!}{(n+2)!}+\frac{n!}{(n+3)!}+....\right)$

  $= b*\left(\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+....\right)$

- **Stelle Ungleichung auf:**

  $$\frac{1}{n+1} < \left(\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+....\right)$$
  $$< \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+... = \frac{1}{n+1-1} = \frac{1}{n}$$

# Also folgt:

- $\frac{b}{n+1} < b * (\frac{}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + ....) < \frac{b}{n}$
- Für $n > b$ gilt:

# Also folgt:

- $\frac{b}{n+1} < b * (\frac{}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots .) < \frac{b}{n}$
- Für $n > b$ gilt:
  - $\frac{b}{n+1} > 0$
  - $\frac{b}{n} < 1$
  - $0 < b * (\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots .) < 1$

# Also folgt:

- $\frac{b}{n+1} < b * (\frac{}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots.) < \frac{b}{n}$
- Für $n > b$ gilt:
  - $\frac{b}{n+1} > 0$
  - $\frac{b}{n} < 1$
  - $0 < b * (\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots.) < 1$

**Also:**

$$b * (\frac{}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots.) \notin \mathbb{Z}$$

n!*b*$(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots.) \notin \mathbb{Z}$

# Füge beide Teile der linken Gleichung zusammen

- **n!*e*b Aufgeteilt in 2 Teile**
- 1. Teil:
  $b * (n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + .... + \frac{n!}{n!}) \in \mathbb{Z}$
- 2. Teil:
  $b * (\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + ....) \notin \mathbb{Z}$

# Füge beide Teile der linken Gleichung zusammen

- **n!*e*b Aufgeteilt in 2 Teile**
- 1. Teil:
  $b * (n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + .... + \frac{n!}{n!}) \in \mathbb{Z}$
- 2. Teil:
  $b * (\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + ....) \notin \mathbb{Z}$

**Summe der beiden Teile:**

$b * (n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + .... + \frac{n!}{n!}) +$
$b * (\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + ....) \notin \mathbb{Z}$

**Die linke Seite der Gleichung kann keine ganze Zahl sein**

$n! * b * e \notin \mathbb{Z}$

# Zurück zum Anfang

- Nehme an:
  $\exists a, b \in \mathbb{Z}, b \geq 0 : \frac{a}{b} = e$

- Dann würde gelten:
  $\forall n \geq 0$: n!*b*e $=$ n!*a

# Zurück zum Anfang

- Nehme an:
  $\exists a, b \in \mathbb{Z}, b \geq 0 : \frac{a}{b} = e$

- Dann würde gelten:
  $\forall n \geq 0$: n!*b*e = n!*a

- $n! * b * e \notin \mathbb{Z}$

- $n! * a \in \mathbb{Z}$

=> **Wiederspruch:** $n! * b * e \neq n! * a$

**Annahme war falsch**

$\nexists a, b \in \mathbb{Z}, b \geq 0 : \frac{a}{b} = e \rightarrow e \notin \mathbb{Q}$

# Irrationalität von $\pi$

Ivan Niven: 1947

# Grundlagen Analysis

- **Differenzieren**
  Potenzregel: $f(x) = x^n; \qquad f'(x) = n * x^{n-1}$

  **Trigonometrische Funktionen:**

  $sin(x) \rightarrow cos(x) \rightarrow -sin(x) \rightarrow -cos(x) \rightarrow sin(x)$

- **Partielles Integrieren:**
  $\int_a^b f'(x) * g(x)dx = [f(x) * g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) * g'(x)dx$

  **Bestimmtes Integral:**

  $[f(x) * g(x)]_a^b = (f(b) * g(b)) - (f(a) * g(a))$

# Beweis: $\pi$ ist irrational (Ivan Niven: 1947)

**Nehme an:**
$\exists a, b \in \mathbb{N}, a, b > 0 : \frac{a}{b} = \pi$
**Definiere:**
$f(x) = \frac{x^n * (a - b * x)^n}{n!}$

**Für** $0 < x < \pi$ **gilt:**

- $0 < sin(x) * f(x)$

# Beweis: $\pi$ ist irrational (Ivan Niven: 1947)

**Nehme an:**
$\exists a, b \in \mathbb{N}, a, b > 0 : \frac{a}{b} = \pi$
**Definiere:**
$f(x) = \frac{x^n * (a - b * x)^n}{n!}$

**Für** $0 < x < \pi$ **gilt:**

- $0 < sin(x) * f(x)$
- $sin(x) * f(x) < \frac{\pi^n * a^n}{n!}$

# Beweis:$\pi$ ist irrational (Ivan Niven: 1947)

**Nehme an:**
$\exists a, b \in \mathbb{N}, a, b > 0 : \frac{a}{b} = \pi$
**Definiere:**
f(x) $= \frac{x^n * (a - b * x)^n}{n!}$

**Für** $0 < x < \pi$ **gilt:**

- $0 < sin(x) * f(x)$
- $sin(x) * f(x) < \frac{\pi^n * a^n}{n!}$
- $0 < sin(x) * f(x) < \frac{\pi^n * a^n}{n!}$

# Stelle Ungleichung für $\int_0^\pi sin(x) * f(x)$ dx auf

- $0 < sin(x) * f(x) < \frac{\pi^n * a^n}{n!}$

  **Für große n gilt:**
  $\frac{\pi^n * a^n}{n!} < \frac{1}{\pi}$

  $0 < sin(x) * f(x) < \frac{\pi^n * a^n}{n!} < \frac{1}{\pi}$

# Stelle Ungleichung für $\int_0^{\pi} sin(x) * f(x)$ dx auf

- $0 < sin(x) * f(x) < \frac{\pi^n * a^n}{n!}$

  **Für große n gilt:**
  $\frac{\pi^n * a^n}{n!} < \frac{1}{\pi}$

  $0 < sin(x) * f(x) < \frac{\pi^n * a^n}{n!} < \frac{1}{\pi}$

- **Bilde Integral:**
  $0 < \int_0^{\pi} sin(x) * f(x) dx < \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} dx = 1$

  $\int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} dx = \left[\frac{1}{\pi} * x\right]_0^{\pi} = (\frac{1}{\pi} * \pi) - (\frac{1}{\pi} * 0) = 1$

  $0 < \int_0^{\pi} sin(x) * f(x) dx < 1$

  $\rightarrow \int_0^{\pi} sin(x) * f(x) dx \notin \mathbb{Z}$

# Forme f(x) um

$\text{f(x)} = \frac{x^n*(a-b*x)^n}{n!}$

**Binomischer Lehrsatz:**

- $(a - b * x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} * (-bx)^k$
- Sei $c_i = \binom{n}{k} * a^{n-k} * (-b)^k \in \mathbb{Z}$

# Forme f(x) um

f(x) $= \frac{x^n * (a - b * x)^n}{n!}$

**Binomischer Lehrsatz:**

- $(a - b * x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} * (-bx)^k$
- Sei $c_i = \binom{n}{k} * a^{n-k} * (-b)^k \in \mathbb{Z}$
- **Schreibe (a-b*x)**$^n als$ :

  $(a - b * x)^n = c_0 * x^0 + c_1 * x^1 + ... + c_n * x^n$

# Forme f(x) um (2)

- $f(x) = \frac{x^n*(a-b*x)^n}{n!}$

  $$(a-b*x)^n = c_0*x^0 + c_1*x^1 + ... + c_n*x^n$$

# Forme f(x) um (2)

- $\mathrm{f(x)} = \frac{x^n*(a-b*x)^n}{n!}$

  $(a - b * x)^n = c_0 * x^0 + c_1 * x^1 + ... + c_n * x^n$

- **Multipliziere noch mit $x^n$:**
  $x^n * (a - b * x)^n = c_0 * x^n + c_1 * x^{n+1} + ... + c_n * x^{n+n}$

- **Schreibe f(x) als:**

  $\mathrm{f(x)} = \frac{c_0*x^n+c_1*x^{n+1}+...+c_n*x^{2n}}{n!}$

  **Es gilt:** $\mathrm{f(0)} = 0$

## Differenziere f(x) $= \frac{c_0 * x^n + c_1 * x^{n+1} + ... + c_n * x^{2n}}{n!}$

- **Für jede i-te Ableitung:** $i < n$
  $f^{(i)}(x) = \frac{z_0 * c_0 * x^{n-i} + * z_1 * c_1 * x^{n+1-i} + ... + Z_n * c_n * x^{2n-i}}{n!}$
  $z_i$: Durch Ableitungen entstandenes Produkt

- **In jedem Teil der Summe kommt noch ein x vor**

  $f^{(i)}(0) = 0$

## Differenziere f(x) $= \frac{c_0*x^n+c_1*x^{n+1}+...+c_n*x^{2n}}{n!}$ (2)

- **Für jede i-te Ableitung:** $n \le i \le 2n$

  $f^{(i)}(x) = \frac{i!*c_{i-n}+*z_{i-n+1}*c_{i-n+1}*x^1+...+i_n*z_n*x^{2n-i}}{n!}$

  Alle Terme $...x^n$ mit $n < i$ fallen weg

  Der Term $...x^n$ mit $n = i$ wird zu $... * n! * x^0$

- **Betrachte f$^{(i)}(0)$**

  $f^{(i)}(0) = \frac{i!*c_{i-n}+0}{n!}$

  **Vorderste Term ist ganze Zahl mit den Faktoren von n!**

  $\frac{i!*c_{i-n}}{n!} \in \mathbb{Z}$

- **Also:**

  $f^{(i)}(0) \in \mathbb{Z}$

# Differenziere f(x) = $\frac{c_0 * x^n + c_1 * x^{n+1} + ... + c_n * x^{2n}}{n!}$ (3)

- **Für jede i-te Ableitung:** $2n < i$

  $f^{(i)}(x) = 0$

- **Für alle Ableitungen i gilt:**

  $f^{(i)}(0) \in \mathbb{Z}$

# Integriere

- $\int_0^\pi sin(x) * f(x) dx$

  $= [-cos(x) * f(x)]_0^\pi + \int_0^\pi cos(x) * f'(x) dx$

# Integriere

- $\int_0^\pi sin(x) * f(x) dx$

  $= [-cos(x) * f(x)]_0^\pi + \int_0^\pi cos(x) * f'(x) dx$

- **Setze Grenzen ein**
  $(-cos(\pi) * f(\pi)) - (-cos(0) * f(0))) = f(\pi) + f(0)$

# Integriere

- $\int_0^\pi sin(x) * f(x)dx$

  $= [-cos(x) * f(x)]_0^\pi + \int_0^\pi cos(x) * f'(x)dx$

- **Setze Grenzen ein**
  $(-cos(\pi) * f(\pi)) - (-cos(0) * f(0))) = f(\pi) + f(0)$

- **Weiter Partiell Integrieren:**
  $f(\pi) + f(0) + \int_0^\pi cos(x) * f'(x)dx$
  $= f(\pi) + f(0) + [sin(x) * f'(x)]_0^\pi$ - $\int_0^\pi sin(x) * f''(x)dx$

# Integriere

- $\int_0^\pi sin(x) * f(x) dx$

  $= [-cos(x) * f(x)]_0^\pi + \int_0^\pi cos(x) * f'(x) dx$

- **Setze Grenzen ein**
  $(-cos(\pi) * f(\pi)) - (-cos(0) * f(0))) = f(\pi) + f(0)$

- **Weiter Partiell Integrieren:**
  $f(\pi) + f(0) + \int_0^\pi cos(x) * f'(x) dx$
  $= f(\pi) + f(0) + [sin(x) * f'(x)]_0^\pi$ - $\int_0^\pi sin(x) * f''(x) dx$

- **Setze Grenzen ein**
  $(sin(\pi) * f'(\pi)) - (sin(0) * f'(0)) = 0$

# Integriere

- $\int_0^\pi sin(x) * f(x)dx$

  $= [-cos(x) * f(x)]_0^\pi + \int_0^\pi cos(x) * f'(x)dx$

- **Setze Grenzen ein**
  $(-cos(\pi) * f(\pi)) - (-cos(0) * f(0))) = f(\pi) + f(0)$

- **Weiter Partiell Integrieren:**
  $f(\pi) + f(0) + \int_0^\pi cos(x) * f'(x)dx$
  $= f(\pi) + f(0) + [sin(x) * f'(x)]_0^\pi$ - $\int_0^\pi sin(x) * f''(x)dx$

- **Setze Grenzen ein**
  $(sin(\pi) * f'(\pi)) - (sin(0) * f'(0)) = 0$

- **Weiter Partiell Integrieren:**
  $f(\pi) + f(0) + 0$ - $\int_0^\pi sin(x) * f^{(2)}(x)dx$
  $= f(\pi) + f(0) + 0 - \left[-cos(x) * f^2(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi cos(x) * f^3(x)dx$

# Integriere (2)

- $f(\pi) + f(0) + 0 - \left[-cos(x) * f^2(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi cos(x) * f^3(x)dx$

  **Bei jeder 2. Integration werden die Terme zu 0**

- **Bei der 2n+1 ten Integration:**
  $....(-1)^n * \int_0^\pi cos(x) * f^{(2n+1)}(x)dx$

- **Wie vorher gezeigt:**
  $f^{(2n+1)}(x) = 0$
  also fällt $(-1)^n * \int_0^\pi cos(x) * f^{(2n+1)}(x)dx$ weg und es muss nicht weiter integriert werden

# Integriere (3)

**Es steht nun noch da:**

$f(\pi)+f(0)+0-(f^{(2)}(\pi)-f^{(2)}(0))-0+(f^{(4)}(\pi)+f^{(4)}(0))+...+(-1)^n*f^{(2n)}(0))$

**Also:**

$\int_0^\pi sin(x)*f(x)dx =$
$f(\pi)+f(0)-f^{(2)}(\pi)-f^{(2)}(0)+f^{(4)}(\pi)+f^{(4)}(0)-...+(-1)^n*f^{(2n)}(0))$

# Weiter Auflösen

$\int_0^\pi sin(x) * f(x) dx =$
$f(\pi) + f(0) - f^{(2)}(\pi) - f^{(2)}(0) + f^{(4)}(\pi) + f^{(4)}(0) - ... + (-1)^n * f^{(2n)}(0))$

- **Welchen Wert haben die Terme?**
- **Wie vorher gezeigt:**

  $f(0), f^{(1)}(0), f^{(2)}(0)....f^{(2n)}(0) \in \mathbb{Z}$
- **Und für f$^{(i)}(\pi)$?**

# Beweis f(x) ist Symmetrisch für 0 und $\pi$

- $\mathrm{f(x)} = \frac{x^n * (a - b * x)^n}{n!}$

  **Nach Annahme:** $\pi = \frac{a}{b}$

- $f(\pi - x) = f(\frac{a}{b} - x) = \frac{(\frac{a}{b} - x)^n * (a - b * (\frac{a}{b} - x))^n}{n!}$

  $$(a - b * (\frac{a}{b} - x))^n = (a - (a - bx))^n = (bx)^n$$

  $= \frac{(\frac{a}{b} - x)^n * b^n * x^n}{n!}$

  $= \frac{x^n * (a - bx)^n}{n!} = f(x)$

# Weiter Auflösen (2)

$\int_0^\pi sin(x) * f(x) dx =$
$f(\pi) + f(0) - f^{(2)}(\pi) - f^{(2)}(0) + f^{(4)}(\pi) + f^{(4)}(0) - ... + (-1)^n * f^{(2n)}(0))$

- **Wie vorher gezeigt:**

  $f(0), f'(0), f^{(2)}(0)....f^{(2n)}(0) \in \mathbb{Z}$

- **f(x) ist symmetrisch:**

  $f(\pi), f'(\pi), f^{(2)}(\pi)....f^{(2n)}(\pi) \in \mathbb{Z}$

# Weiter Auflösen (2)

$\int_0^\pi sin(x) * f(x) dx =$
$f(\pi) + f(0) - f^{(2)}(\pi) - f^{(2)}(0) + f^{(4)}(\pi) + f^{(4)}(0) - ... + (-1)^n * f^{(2n)}(0))$

- **Wie vorher gezeigt:**

  $f(0), f'(0), f^{(2)}(0)....f^{(2n)}(0) \in \mathbb{Z}$

- **f(x) ist symmetrisch:**

  $f(\pi), f'(\pi), f^{(2)}(\pi)....f^{(2n)}(\pi) \in \mathbb{Z}$

- **Das heißt:**
  $f(\pi) + f(0) - f^{(2)}(\pi) - f^{(2)}(0) + f^{(4)}(\pi) + f^{(4)}(0) - ... +$
  $(-1)^n * f^{(2n)}(0))$
  Ist eine Summe von ganzen Zahlen

- **Also:** $\int_0^\pi sin(x) * f(x) dx \in \mathbb{Z}$

# Zusammenfassung

- **Eben berechnet** $\int_0^\pi sin(x) * f(x)dx \in \mathbb{Z}$

- **Ungleichung zu Anfang**
  $0 < \int_0^\pi sin(x) * f(x)dx < \int_0^\pi \frac{1}{\pi}dx = 1$

- **Widerspruch:**
  Es kann nicht gelten
  $\int_0^\pi sin(x) * f(x)dx \in \mathbb{Z}$

  und

  $0 < \int_0^\pi sin(x) * f(x)dx < 1$

- **Annahme war falsch:**
  $\nexists a, b \in \mathbb{N}, a, b > 0 : \frac{a}{b} = \pi$

  $\implies \pi \notin \mathbb{Q}$

# Quellen

**e ist irrational:**
Martin Aigner, Günter M. Ziegler, (2014), Das BUCH der Beweise, 4. Auflage, Berlin

**$\pi$ ist irrational: (Ivan Niven: 1947)**
https://www.ams.org/journals/bull/1947-53-06/S0002-9904-1947-08821-2/S0002-9904-1947-08821-2.pdf

Letzer Zugriff: 22.11.2022