Die Fundamentalgruppe

A Beginners Guide to a Millenium Problem

Malte Borgmann

Institut für Informatik Humboldt-Universität zu Berlin

November 16, 2022

Gliederung

Henri Poincaré

- Französischer Mathematiker und Physiker

Henri Poincaré

- Französischer Mathematiker und Physiker
- "entdeckte" vor Einstein

$$E = mc^2$$

Henri Poincaré

- Französischer Mathematiker und Physiker
- "entdeckte" vor Einstein

$$E = mc^2$$

- Mitbegründer und Wegweiser der (algebraischen) Topologie [2]

Wortlaut

Poincaré Vermutung

Jede einfach zusammenhängende, kompakte, unberandete, 3-dimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

Erläuterung

Poincaré Vermutung

Jede einfach zusammenhängende, kompakte, unberandete, 3-dimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.[3]

Erläuterung

Poincaré Vermutung

Jede einfach zusammenhängende, kompakte, unberandete, 3-dimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.[3]

- 3-dimensionale Manigfaltigkeit $\approx$ lokal so wie der $\mathbb{R}^3$

Erläuterung

Poincaré Vermutung

Jede einfach zusammenhängende, kompakte, unberandete, 3-dimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.[3]

- 3-dimensionale Manigfaltigkeit $\approx$ lokal so wie der $\mathbb{R}^3$
- kompakt sowie unberandet technische Vorraussetzungen

Erläuterung

Poincaré Vermutung

Jede einfach zusammenhängende, kompakte, unberandete, 3-dimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.[3]

- 3-dimensionale Manigfaltigkeit $\approx$ lokal so wie der $\mathbb{R}^3$
- kompakt sowie unberandet technische Vorraussetzungen
- einfach zusammenhängend im zweiten Teil des Vortrags

Erläuterung

Poincaré Vermutung

Jede einfach zusammenhängende, kompakte, unberandete, 3-dimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.[3]

- 3-dimensionale Manigfaltigkeit $\approx$ lokal so wie der $\mathbb{R}^3$
- kompakt sowie unberandet technische Vorraussetzungen
- einfach zusammenhängend im zweiten Teil des Vortrags
- homöomorph im folgenden Teil des Vortrags

Was wollen wir?

- Topologie ist die mathematische Lehre von Formen im Raum

Was wollen wir?

- Topologie ist die mathematische Lehre von Formen im Raum
- fundamental verschiedene Formen unterscheiden
- Eigenschaften von Formen verstehen und charakterisieren

Was meinen wir mit Formen?

- Punktmengen mit einer "Idee" von Nähe

Was meinen wir mit Formen?

- Punktmengen mit einer "Idee" von Nähe
- gröbst vereinfacht Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

Was meinen wir mit Formen?

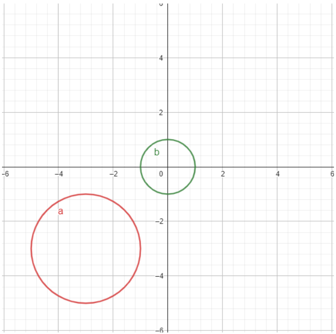
- Punktmengen mit einer "Idee" von Nähe
- gröbst vereinfacht Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

Definition

Ein **topologischer Raum** besteht aus einer Menge M sowie einer Menge $\mathcal{T} \subseteq 2^M$ der sogenannten *Topologie* von M

Das Problem

"gleiche" Formen sind nach dieser Definition fast nie gleich



Die Lösung

Die Lösung

Homöomorphismen

Zwei Topologische Räume $(X, \mathbb{T}), (Y, \mathbb{T}')$ sind homöomorph genau dann wenn es eine *stetige, bijektive* Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ gibt, deren Inverse f^{-1} ebenfalls stetig ist.

Die Lösung

Homöomorphismen

Zwei Topologische Räume $(X, \mathbb{T}), (Y, \mathbb{T}')$ sind homöomorph genau dann wenn es eine *stetige, bijektive* Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ gibt, deren Inverse f^{-1} ebenfalls stetig ist.

Homöomorphe topologische Räume sind "gleich".

Die Lösung

Homöomorphismen

Zwei Topologische Räume $(X, \mathbb{T}), (Y, \mathbb{T}')$ sind homöomorph genau dann wenn es eine *stetige, bijektive* Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ gibt, deren Inverse f^{-1} ebenfalls stetig ist.

Homöomorphe topologische Räume sind "gleich". Es ist sehr schwer zu testen, ob topologische Räume gleich sind.

Invarianten

- kein seltenes Problem, keine seltene Lösung
- Beispiele:

Invarianten

- kein seltenes Problem, keine seltene Lösung
- Beispiele: Vektorräume und die Dimension

Invarianten

- kein seltenes Problem, keine seltene Lösung
- Beispiele: Vektorräume und die Dimension, Graphen und Zusammenhangskomponenten

Invarianten

- kein seltenes Problem, keine seltene Lösung
- Beispiele: Vektorräume und die Dimension, Graphen und Zusammenhangskomponenten, Matritzen und nicht-Null Determinanten
- für topologische Räume zum Beispiel Zusammenhangskomponenten

Die Fundamentalgruppe

Fundamentalgruppe

Gegeben ein topologischer Raum X und $p \in X$ einem Punkt in X definieren wir die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, p) := (p \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} p)_{/h}$[3]

Dabei ist $p \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} p$ ein (stetiger) Pfad vom Punkt p zu sich selbst durch den topologischen Raum.
h die sogenannte *Homotopie* ist eine Äquivalenzrelation unter der stetig ineinander umwandelbare Pfade äquivalent sind.

Die Fundamentalgruppe

Fundamentalgruppe

Gegeben ein topologischer Raum X und $p \in X$ einem Punkt in X definieren wir die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, p) := (p \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} p)_{/h}$[3]

Dabei ist $p \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} p$ ein (stetiger) Pfad vom Punkt p zu sich selbst durch den topologischen Raum.
h die sogenannte *Homotopie* ist eine Äquivalenzrelation unter der stetig ineinander umwandelbare Pfade äquivalent sind.
Ist $\pi_1(x, p) = 0$ nennen wir X einfach zusammenhängend.

Lesenswerte Quellen

[1] Prof. Dr. Helga Baum. *Analysis 1 und 2*. 2015. URL: https://www.mathematik.hu-berlin.de/~baum/Skript/Analysis-LA-14-15-Summe.pdf (visited on 11/09/2022).

[2] Henri Pointcaré. *Papers on Topology. Analysis Situs and Its Five Supplements*. Trans. by John Stillwell. 2009. URL: https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/poincare2009.pdf (visited on 11/09/2022).

[3] Prof. Dr. Chris Wendl. *Topology I and II*. 2021. URL: https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Winter2018/Topologie2/lecturenotes.pdf (visited on 11/09/2022).